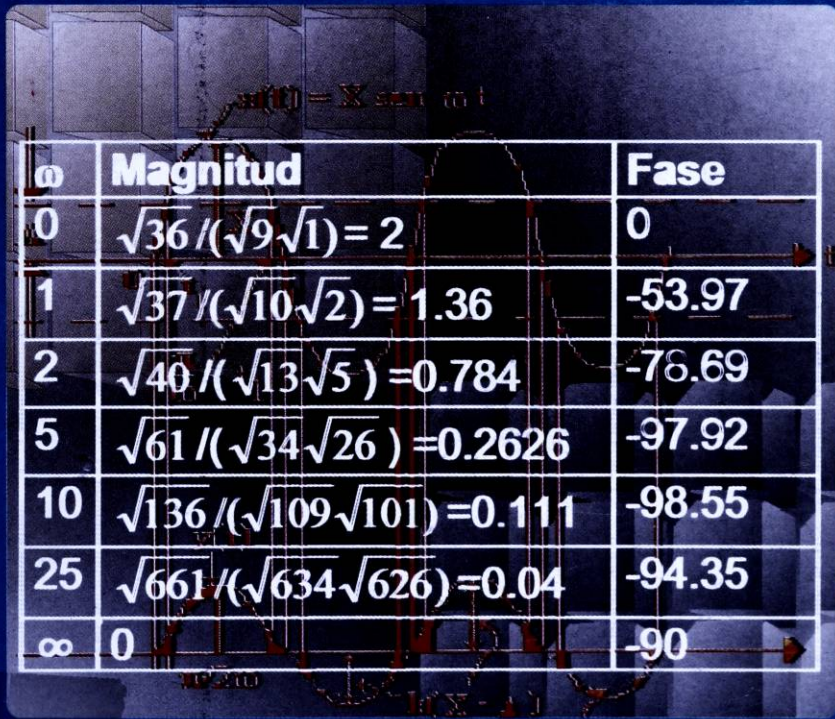


Manual de soluciones a problemas básicos de la UEA

Sistemas de control II

Enrique Álvarez Ballesteros



ω	Magnitud	Fase
0	$\sqrt{36}/(\sqrt{9}\sqrt{1}) = 2$	0
1	$\sqrt{37}/(\sqrt{10}\sqrt{2}) = 1.36$	-53.97
2	$\sqrt{40}/(\sqrt{13}\sqrt{5}) = 0.784$	-76.69
5	$\sqrt{61}/(\sqrt{34}\sqrt{26}) = 0.2626$	-97.92
10	$\sqrt{136}/(\sqrt{109}\sqrt{101}) = 0.111$	-98.55
25	$\sqrt{661}/(\sqrt{634}\sqrt{626}) = 0.04$	-94.35
∞	0	-90

Manual de soluciones
a problemas básicos
de la UEA

Sistemas de control II

Manual de soluciones a problemas básicos de la UEA

Sistemas de control II

Enrique Álvarez Ballesteros



2892913



División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Electrónica

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD AZCAPOTZALCO

RECTOR
DR. ADRIÁN GERARDO DE GARAY SÁNCHEZ

SECRETARIA
DRA. SYLVIE JEANNE TURPIN MARION

COORDINADORA GENERAL DE DESARROLLO ACADÉMICO
DRA. NORMA RONDERO LÓPEZ

COORDINADOR DE EXTENSIÓN UNIVERSITARIA
D. I. JORGE ARMANDO MORALES ACEVES

JEFE DE LA SECCIÓN DE PRODUCCIÓN Y DISTRIBUCIÓN EDITORIALES
LIC. FRANCISCO JAVIER RAMÍREZ TREVIÑO

CORRECCIÓN:
ROSENDO GARCÍA LEYVA
ILUSTRACIÓN DE PORTADA:
CONSUELO QUIROZ REYES
DISEÑO DE PORTADA:
MODESTO SERRANO RAMÍREZ

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD AZCAPOTZALCO
AV. SAN PABLO 180
COL. REYNOSA TAMAULIPAS
DEL. AZCAPOTZALCO
C. P. 02200
MÉXICO, D. F.

© UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD AZCAPOTZALCO

ENRIQUE ÁLVAREZ BALLESTEROS

*MANUAL DE SOLUCIONES A PROBLEMAS BÁSICOS
DE LA UEA SISTEMAS DE CONTROL II*
ISBN: 970-31-0629-3

1^a. EDICIÓN, 2006
1^a. REIMPRESIÓN, 2009

IMPRESO EN MÉXICO

ÍNDICE

PRÓLOGO	7
I. MÉTODOS DE RESPUESTA A LA FRECUENCIA	9
I.1 DIAGRAMAS DE BODE	10
I.2 GRÁFICAS POLARES O DE NYQUIST	38
I.3 GRÁFICAS DE NICHOLS	53
II. LUGAR DE LAS RAÍCES	59
II.1 REGLAS DE CONSTRUCCIÓN DEL LUGAR DE LAS RAÍCES	60
III. COMPENSACIÓN DE SISTEMAS	89
III.1 COMPENSACIÓN POR AJUSTE A LA GANANCIA	90
III.2 COMPENSACIÓN POR ADELANTO DE FASE	96
III.3 COMPENSACIÓN POR ATRASO-ADELANTO DE FASE	99
IV. SISTEMAS NO LINEALES	115
IV.1 FUNCIÓN DESCRIPTIVA	116
IV.2 ANÁLISIS CON LA FUNCIÓN DESCRIPTIVA	131
V. PROBLEMAS PROPUESTOS CON SOLUCIÓN	151
V.1 MÉTODOS DE RESPUESTA A LA FRECUENCIA	151
V.2 LUGAR DE LAS RAÍCES	151
V.3 COMPENSACIÓN DE SISTEMAS	154
V.4 SISTEMAS NO LINEALES	161
BIBLIOGRAFÍA	163

Prólogo

El propósito de este manual es proporcionar a los alumnos que cursan la U. E. A. sistemas de control II, en la división de CBI de la UAM Azcapotzalco, material que facilite el aprendizaje de la materia, como apoyo a las notas proporcionadas en el salón de clases.

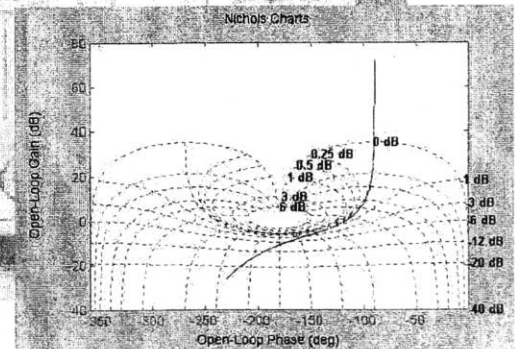
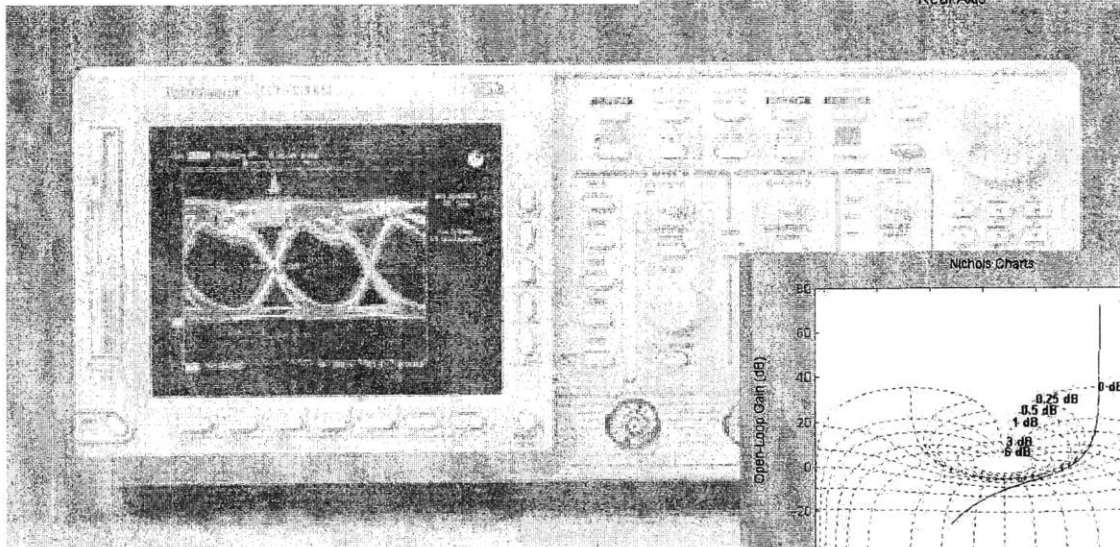
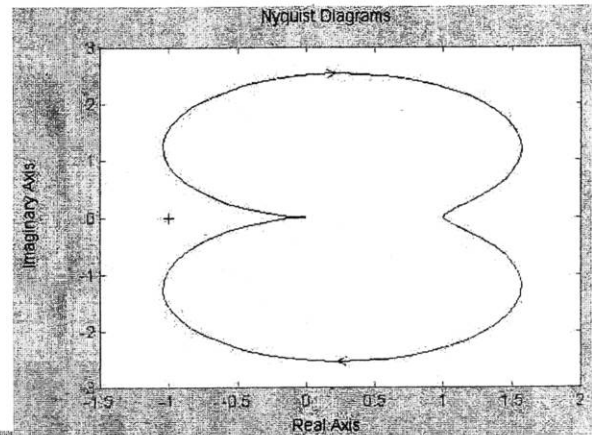
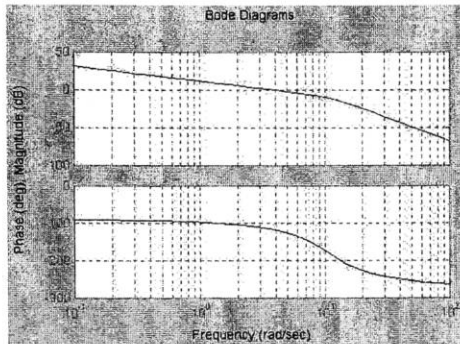
Presenta problemas básicos resueltos paso a paso y problemas propuestos con solución para los cuatro capítulos de que consta el programa de la U. E. A. Algunos pueden parecer similares a otros pero cada uno ha sido seleccionado para ilustrar algún punto o método de solución.

Al usar este problemario, el estudiante puede revisar y estudiar los problemas ilustrados de cada capítulo cuando él lo requiera y no quedar limitado al tiempo que cada profesor dedica para explicar los problemas en clase, además le proporciona mejor comprensión y ahorro de tiempo ya que todos problema se desarrollan paso a paso, llevando lo no desarrollado en los libros de texto.

Se recomienda estudiar repetidamente algún problema para su entendimiento. Revisar varias veces es esencial para ganar experiencia en el conocimiento de los principios que deben ser aplicados y para seleccionar las mejores técnicas de solución.

Toda sugerencia, con el fin de mejorar este manual será bien recibida.

I. MÉTODOS DE RESPUESTA A LA FRECUENCIA



- Diagramas de Bode
- Gráficas de Nyquist
- Gráficas de Nichols

I.1 DIAGRAMA DE BODE

1. Dibuje los diagramas de Bode de la función de transferencia $G(s)$, utilizando el método del trazo de esquina.

$$G(s) = \frac{4 \left(\frac{s}{2} + 1 \right)}{s^2 \left(\frac{s}{8} + 1 \right) \left(\frac{s}{10} + 1 \right)}$$

La función de transferencia ya está normalizada, ahora hacemos $s = j\omega$ y lo descomponemos en factores.

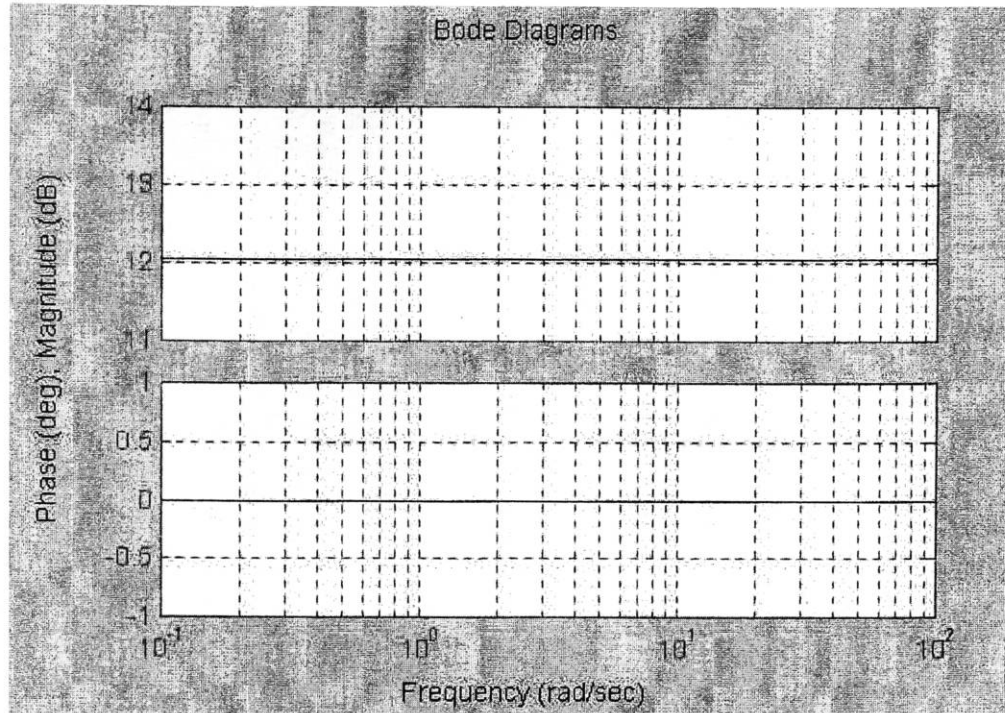
$$G(j\omega) = \frac{4 \left(\frac{j\omega}{2} + 1 \right)}{(j\omega)^2 \left(\frac{j\omega}{8} + 1 \right) \left(\frac{j\omega}{10} + 1 \right)} = 4 \left(\frac{j\omega}{2} + 1 \right) (j\omega^2)^{-1} \left(\frac{j\omega}{8} + 1 \right)^{-1} \left(\frac{j\omega}{10} + 1 \right)^{-1}$$

Tabla 6.- Factores del sistema $GH(s) = 4(s/2 + 1)/[s^2(s/8 + 1)(s/10 + 1)]$

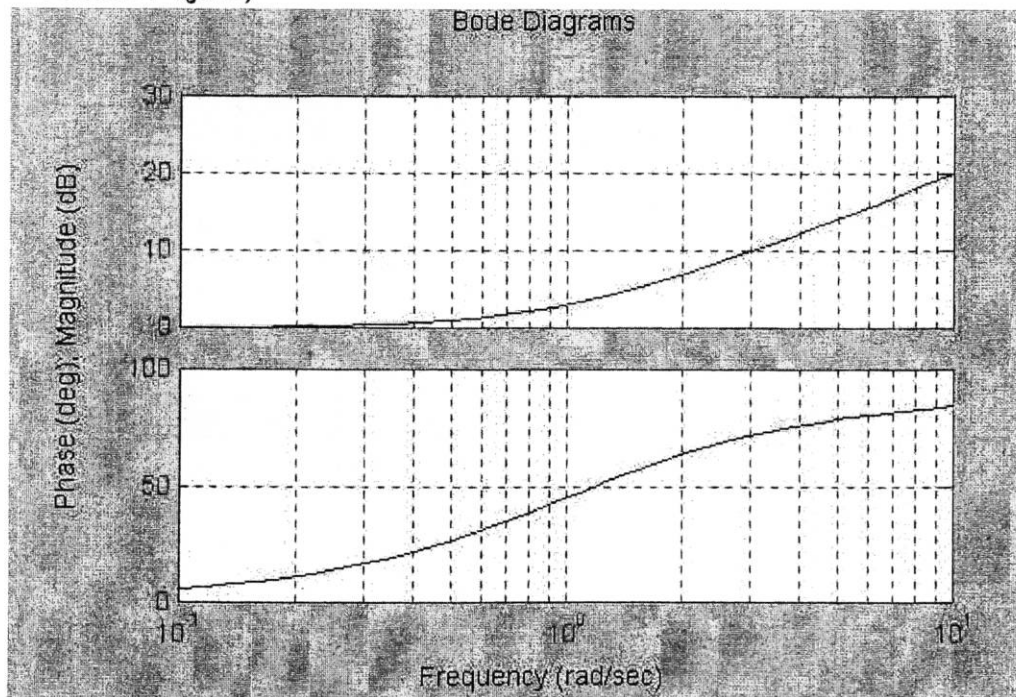
Factor	Magnitud/Pendiente	Fase
4	$20\log 4 = 12.04\text{db}$	0°
$1 + (j\omega)/2$	$\omega_c = 2$ pendiente = 20 db/dec	$0^\circ : \omega_1 = \omega_c/5 = 0.4$ $90^\circ : \omega_2 = 5\omega_c = 10$
$[(j\omega)^2]^{-1}$	$\omega_c = 1$ pendiente = -40 db/dec	-180°
$(1 + (j\omega/8))^{-1}$	$\omega_c = 8$ pendiente = -20 db/dec	$0^\circ : \omega_1 = \omega_c/5 = 1.6$ $-90^\circ : \omega_2 = 5\omega_c = 40$
$(1 + (j\omega/10))^{-1}$	$\omega_c = 10$ pendiente = -20 db/dec	$0^\circ : \omega_1 = 10/5 = 2$ $-90^\circ : \omega_2 = 5 + 10 = 50$

Con los datos obtenidos en la tabla se puede realizar un trazo de esquina en papel semilogarítmico. A continuación se muestran las gráficas de cada factor:

Factor: 4



Factor: $1+(j\omega/2)$



La teoría de grupos topológicos localmente compactos es de gran importancia para garantizar las medidas invariantes por la izquierda y por la derecha que son las medidas de Haar que se estudian en el capítulo 5. También se introduce la condición de admisibilidad para funciones en el espacio $L^2(\mathbb{R})$.

Finalmente, en los capítulos 6 y 7, se da la definición de la transformada wavelet y su fórmula de reconstrucción o resolución de la identidad. En el capítulo 6 se han expuesto ejemplos que clarifican el hecho de que la transformada wavelet es un método de localización tiempo-frecuencia que mejora el usado a través de la transformada de ventana de Fourier.

Los capítulos 8 y 9 están dedicados a estudiar diferentes caracterizaciones de la transformada wavelet para diferentes funciones admisibles principalmente usando los operadores traslación, dilatación y modulación.

Bajo ciertas condiciones, se puede calcular la derivada de la transformada wavelet, así como calcular la transformada de la derivada de una función. Estos resultados son estudiados en el capítulo 10.

En el capítulo 11 se ha considerado el teorema de muestreo que se puede obtener al notar que la imagen de la transformada wavelet se puede escribir a través de un *kernel*.

Al final del libro se presentan algunas tablas que muestran la transformada wavelet continua para ciertas funciones especiales.

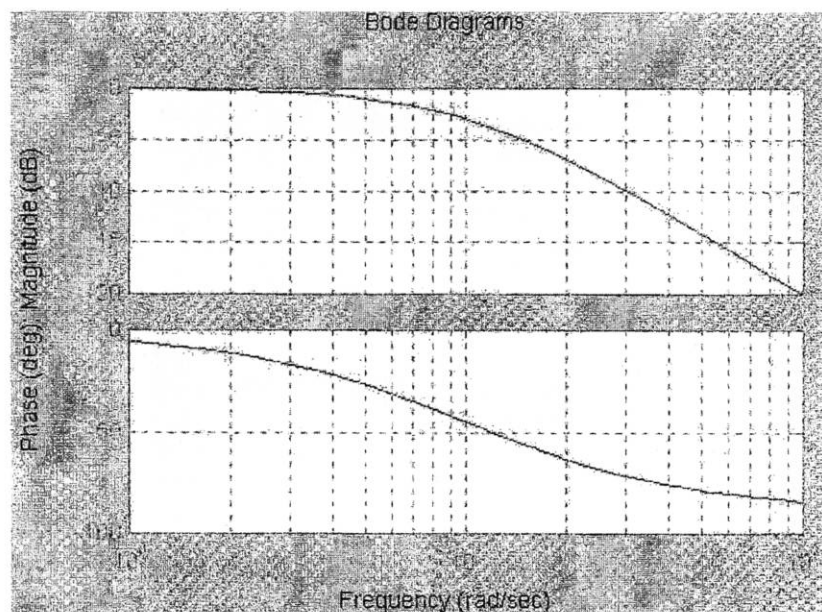
Consideramos que el contenido de este libro puede ser de gran utilidad a la comunidad académica para analizar la transformada wavelet y también el por qué de poder usar diferentes funciones admisibles y así elegir la transformada wavelet que mejor le convenga para usarla como un método alternativo al análisis tiempo-frecuencia.

Además, pensamos que el material expuesto en esta obra puede servir de apoyo para estudiantes graduados o estudiantes de los últimos semestres de ciencias, ingeniería y matemáticas con conocimientos en análisis matemático. También el libro puede recomendarse como referencia para los cursos de análisis de señales y sobre todo para un curso introductorio a la teoría de wavelets.

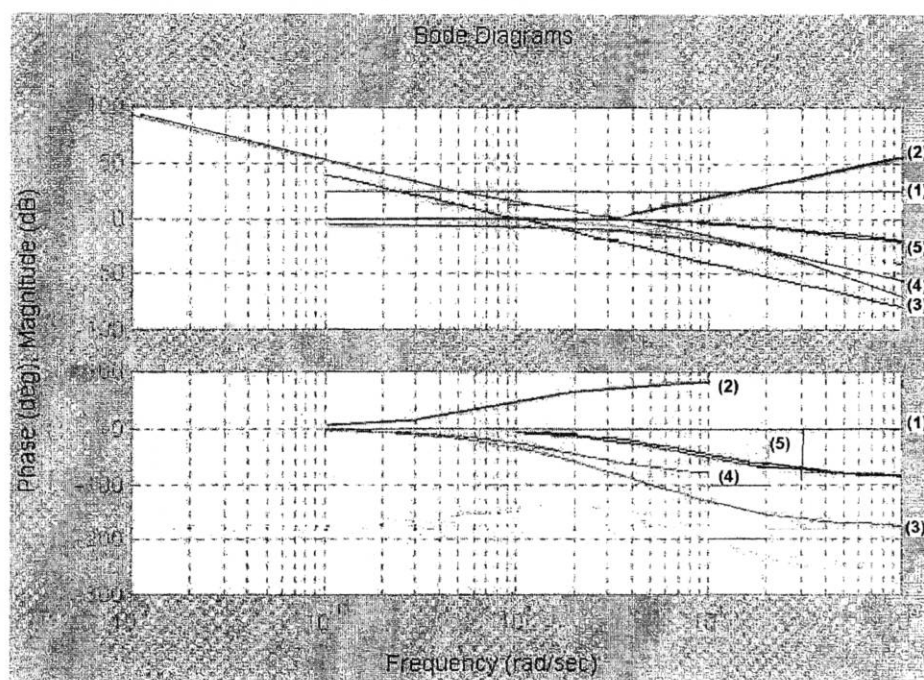
Agradecemos a los árbitros sus valiosos comentarios y al personal de la oficina de producción editorial de la UAM-A por su apoyo en la edición de este libro.

Los autores.

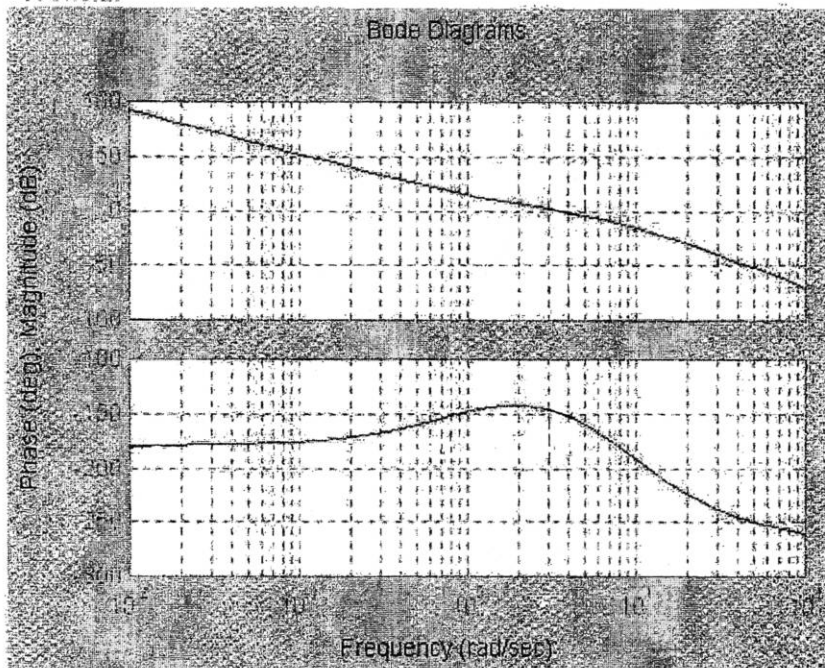
Factor: $[1+(j\omega/10)^2]^{-1}$



Superponiendo todas las gráficas anteriores:



Sumando las gráficas anteriores se obtiene la siguiente gráfica de ganancia y fase contra frecuencia .



Diagramas de Bode para el sistema $G(s) = 4(1 + \frac{s}{2}) / [s^2(1 + \frac{s}{8})(1 + \frac{s}{10})]$

2. Dibuje los diagramas de Bode de la función de transferencia $G(s)$, utilizando el método del trazo de esquina.

$$G(s) = \frac{16}{(s+8)(s+2)}$$

La función de transferencia se normaliza dividiendo numerador y denominador entre 16.

$$G(s) = \frac{1}{(\frac{s}{8}+1)(\frac{s}{2}+1)}$$

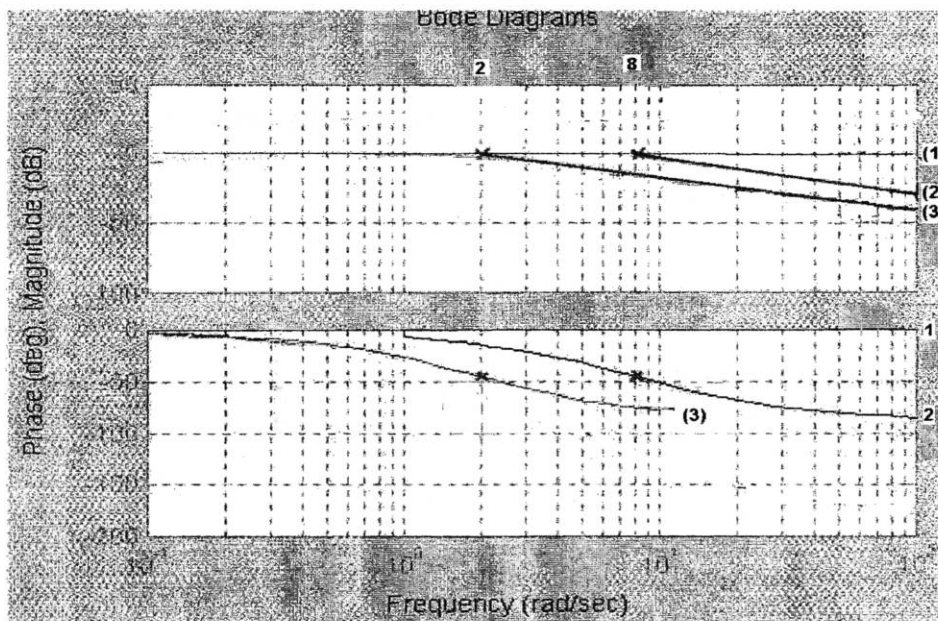
La función de transferencia en factores es :

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{8} + 1\right)\left(\frac{j\omega}{2} + 1\right)} = 1 \left(\frac{j\omega}{8} + 1\right)^{-1} \left(\frac{j\omega}{2} + 1\right)^{-1}$$

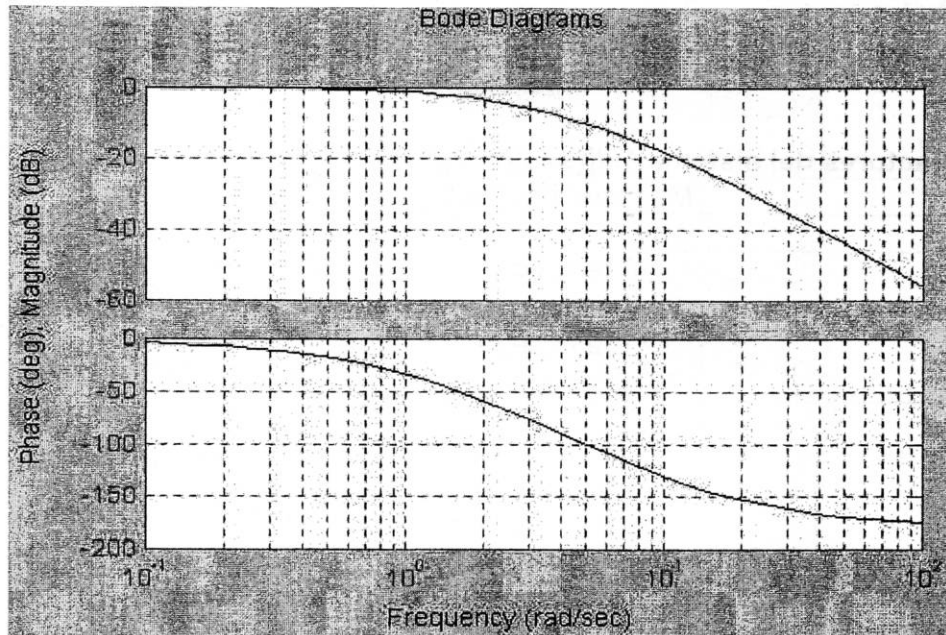
Tabla 3.- Factores del sistema $16/[s(s+8)]$

Factor	Magnitud/Pendiente	Fase
1	0 db	0°
$\left(\frac{j\omega}{8} + 1\right)^{-1}$	$\omega_c = 8$ rad/seg -20 db/dec	0° : $\omega_1 = 1.6$ rad/seg -90° : $\omega_2 = 40$ rad/seg
$\left(\frac{j\omega}{2} + 1\right)^{-1}$	$\omega_c = 2$ rad/seg -20 db/dec	0° : $\omega_1 = 0.4$ rad/seg -90° : $\omega_2 = 10$ rad/seg

Los diagramas de Bode de los factores son:



Y sumando todos los factores



Diagramas de Bode para el sistema $16/[(s+8)(s+2)]$

3. Dibuje los diagramas de Bode de la Función de transferencia de lazo abierto.

$$GH(s) = \frac{k(s+2)}{s^2(s+4)(s+6)}$$

Sacando a 2 como factor común en el numerador y a 24 en el denominador y poniendo $s = j\omega$ se obtiene la forma de Bode o normalizada.

$$GH(j\omega) = \frac{\frac{k}{12}(1 + \frac{j\omega}{2})}{(j\omega)^2(1 + \frac{j\omega}{4})(1 + \frac{j\omega}{6})}$$

La función de transferencia en factores es:

$$GH(S) = \frac{K(S+2)}{S^2(S+4)(S+6)} = K_B \left(1 + \frac{j\omega}{2} \right) \left(\frac{1}{(j\omega)^2} \right) \left(\frac{1}{1 + \frac{j\omega}{4}} \right) \left(\frac{1}{1 + \frac{j\omega}{6}} \right)$$

La ganancia de Bode es $K_B = k/12$

Si $k = 24$:

$$K_B = 2 \Rightarrow K_B = 20 \log 2 = 6 \text{ dB.}$$

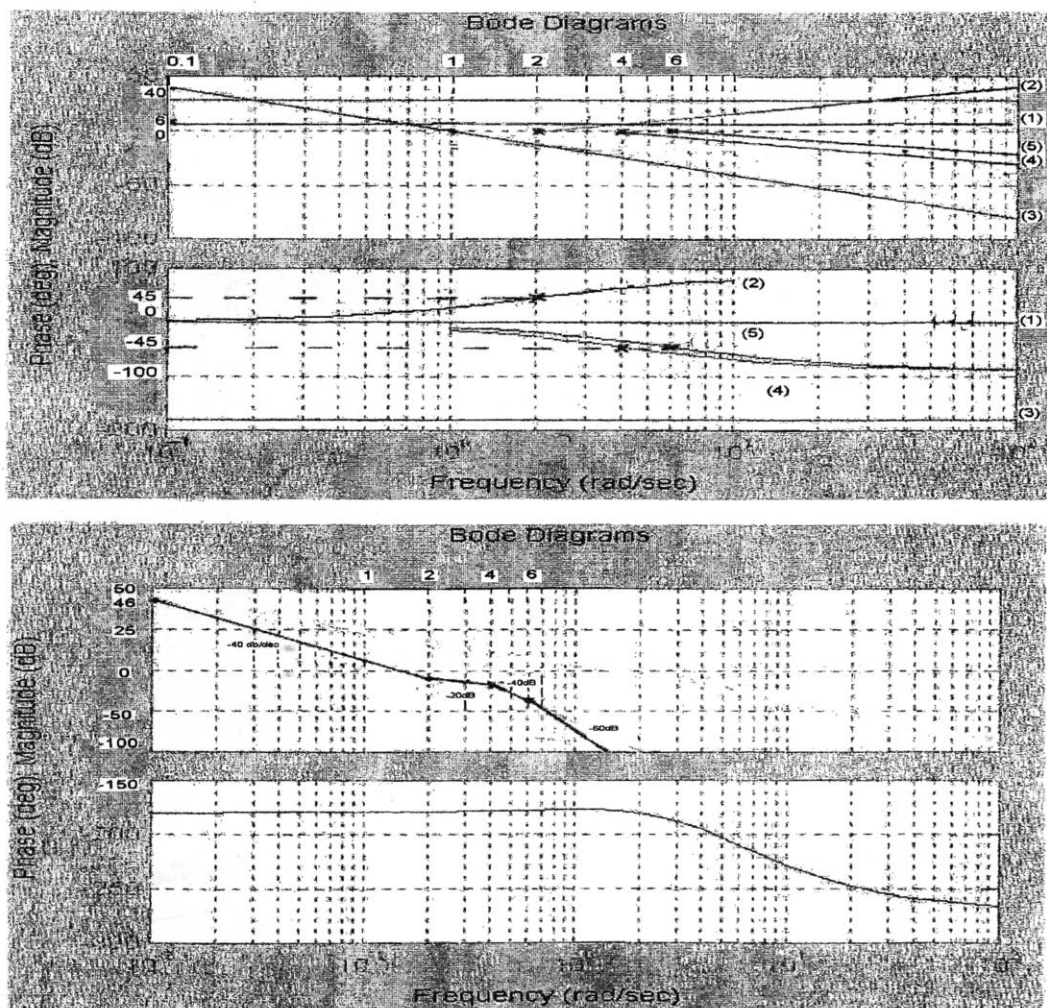


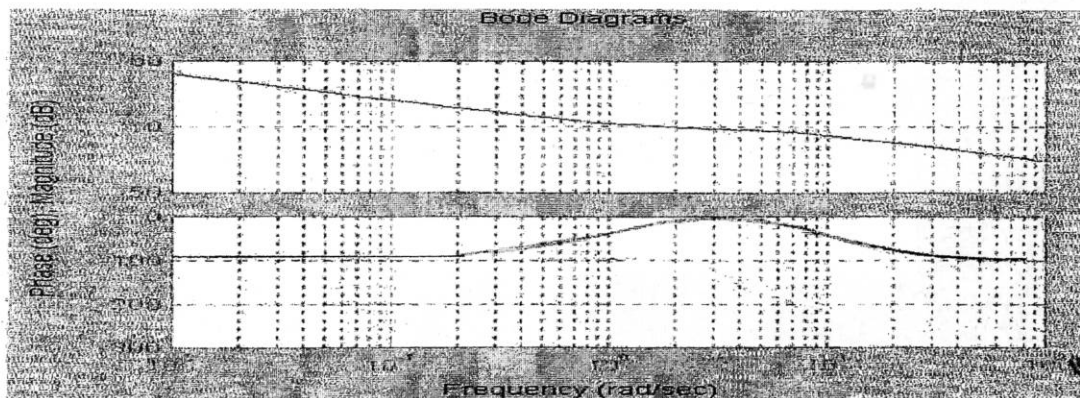
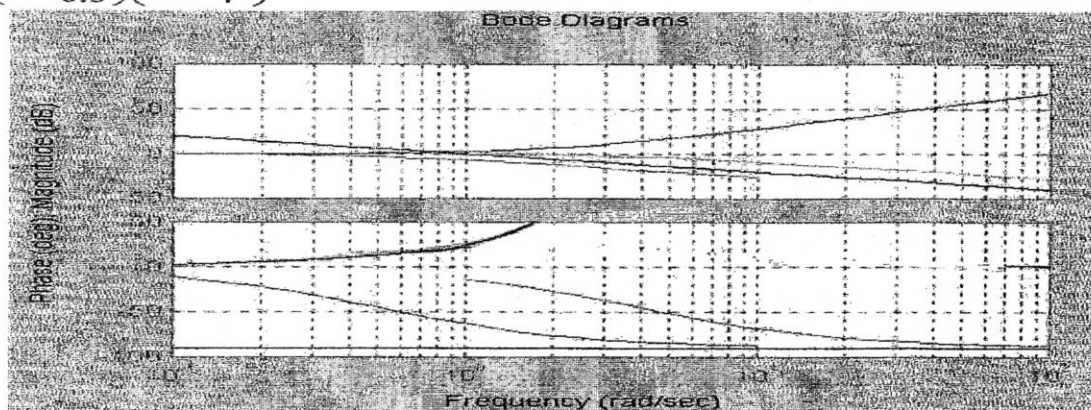
Figura 1.- Gráficas de Bode para el sistema $GH(s)$

4. Dibuje los diagramas de Bode de la función de transferencia de lazo abierto.

$$GH(s) = \frac{\frac{s^2}{2} + \frac{s}{2} + 1}{s \left(1 + \frac{s}{.5}\right) \left(1 + \frac{s}{4}\right)}$$

Las representaciones asintóticas de Bode se determinan sumando las gráficas de las representaciones asintóticas de cada uno de los términos de $GH(j\omega)$.

$$GH(s) = \frac{1 + \frac{j\omega}{2} - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2}{j\omega \left(1 + \frac{j\omega}{0.5}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{4}\right)}$$



5. Dibuje los diagramas de Bode para el siguiente sistema de lazo abierto y obtenga la frecuencia de cruce de ganancia y el margen de fase del sistema de retroalimentación.

$$GH(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

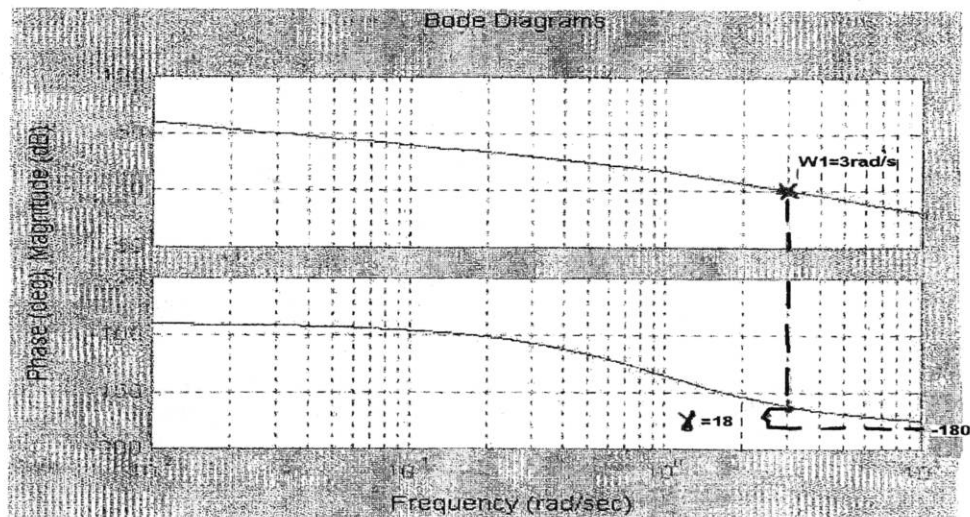
Esta función no necesita ser normalizada, en constantes de tiempo queda:

$$GH(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\omega+1)}$$

Tabla 4.- Factores para el sistema $G(s)=10/[s(s+1)]$ y $H(s)=1$

Factor	Magnitud/Pendiente	Fase
10	20 db	0°
$(j\omega)^{-1}$	$\omega_c=1$ rad/seg -20 db/dec	-90°
$(1+j\omega)^{-1}$	$\omega_c=1$ rad/seg -20 db/dec	-90°

A continuación se observa la gráfica de los diagramas de Bode:



Diagramas de Bode para el sistema $G(s)=10/[s(s+1)]$ con $H(s)=1$.

Frecuencia de cruce de ganancia $\omega_1 = 3.084$ rad/seg
Margen de Fase (γ) = 17.964°.

6. Obtener los diagramas de Bode para el siguiente sistema de lazo abierto y determinar el margen de fase del sistema de retroalimentación.

$$G(s) = \frac{10(s+4)}{(s+2)(s+8)}$$

$$H(s) = \frac{1}{s}$$

La Función de transferencia del sistema de lazo abierto es:

$$GH(s) = \frac{10(s+4)}{s(s+2)(s+8)}$$

Normalizado:

$$GH(s) = \frac{40\left(\frac{s}{4} + 1\right)}{16s\left(\frac{s}{2} + 1\right)\left(\frac{s}{8} + 1\right)} = \frac{2.5\left(\frac{s}{4} + 1\right)}{s\left(\frac{s}{2} + 1\right)\left(\frac{s}{8} + 1\right)}$$

Haciendo $s=j\omega$:

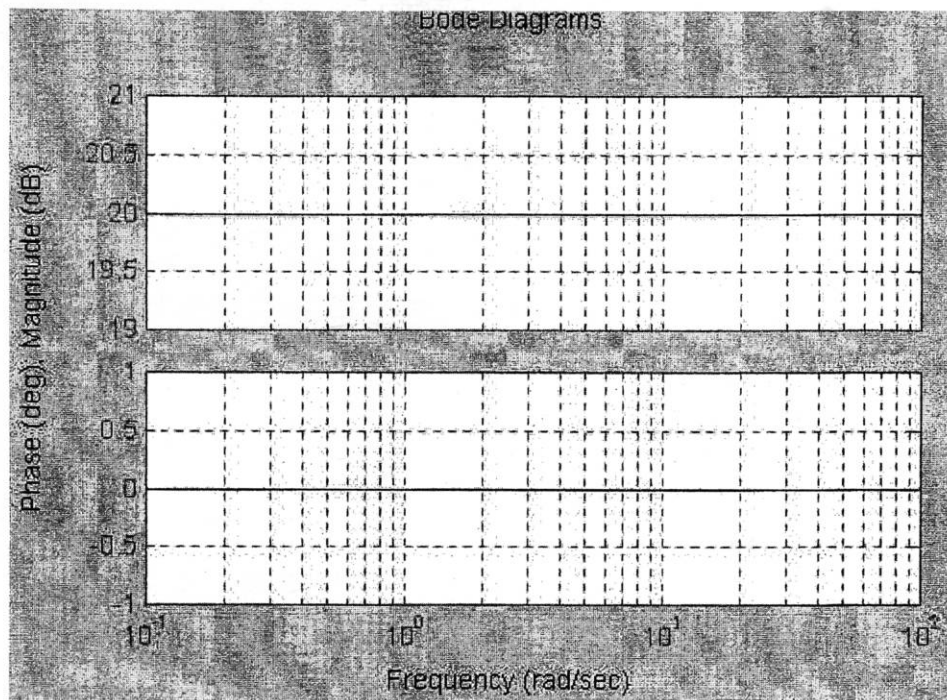
$$GH(j\omega) = \frac{2.5\left(\frac{j\omega}{4} + 1\right)}{j\omega\left(\frac{j\omega}{2} + 1\right)\left(\frac{j\omega}{8} + 1\right)}$$

Tabla 5.- Factores del sistema del problema 5

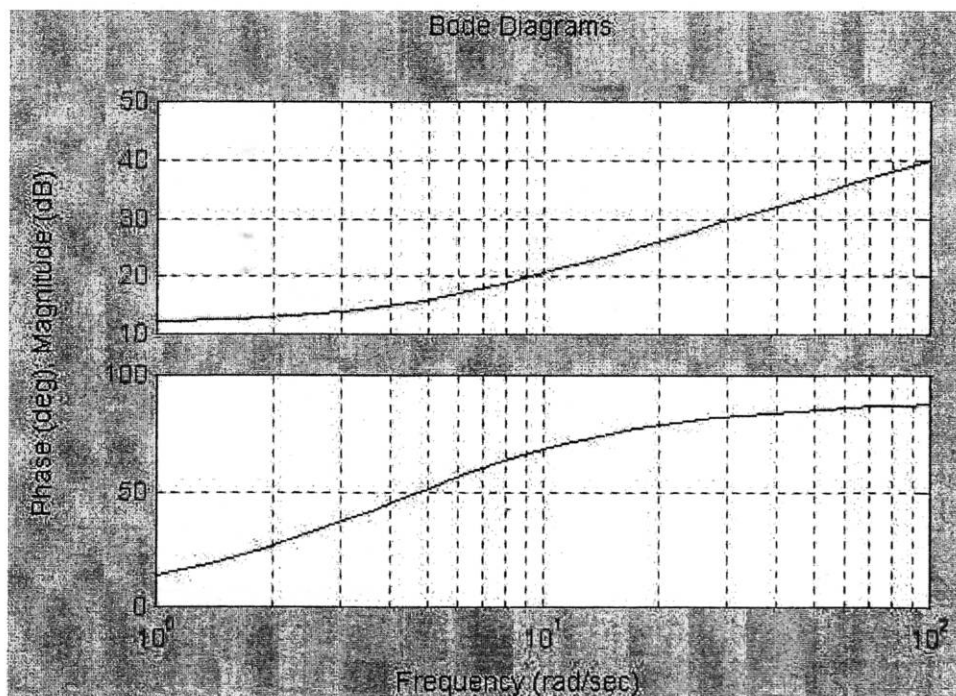
Factor	Magnitud/Pendiente	Fase
2.5	7.958 db	0°
$(j\omega/4) + 1$	$\omega_c=4$ rad/seg 20 db/dec	0° : $\omega_1=0.8$ rad/seg 90° : $\omega_2=20$ rad/seg
$(j\omega)^{-1}$	$\omega_c=1$ rad/seg -20 db/dec	-90°
$((j\omega/2) + 1)^{-1}$	$\omega_c=2$ rad/seg -20 db/dec	0° : $\omega_1=0.4$ rad/seg -90° : $\omega_2=10$ rad/seg
$((j\omega/8) + 1)^{-1}$	$\omega_c=8$ rad/seg -20 db/dec	0° : $\omega_1=1.6$ rad/seg -90° : $\omega_2=40$ rad/seg

Las siguientes gráficas muestran los diagramas de Bode de cada factor:

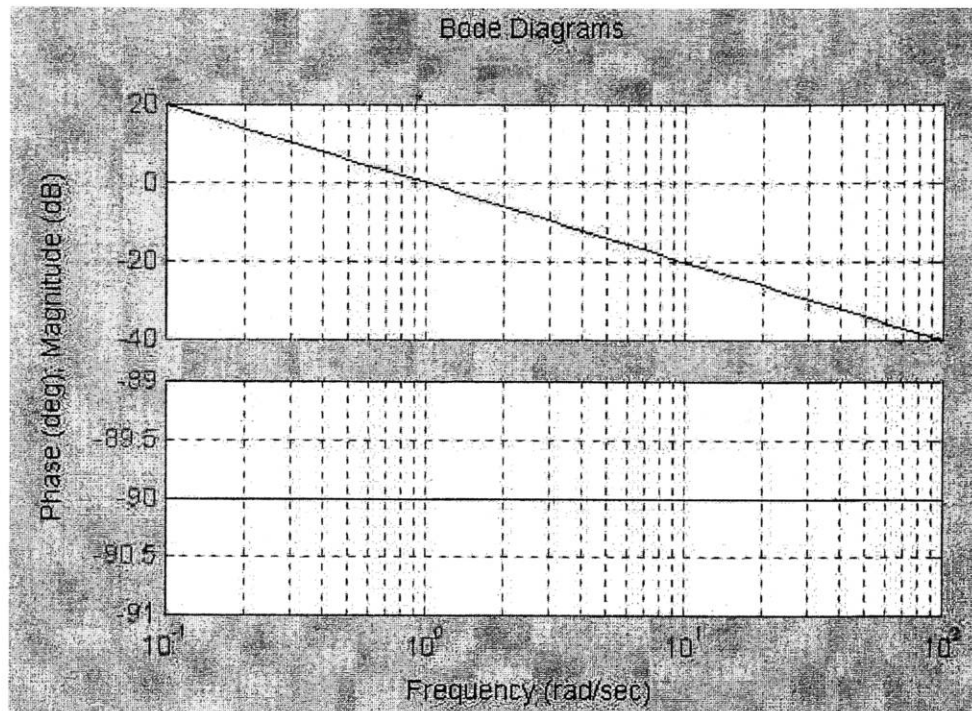
Las siguientes gráficas muestran los diagramas de Bode de cada factor:
Factor 2.5



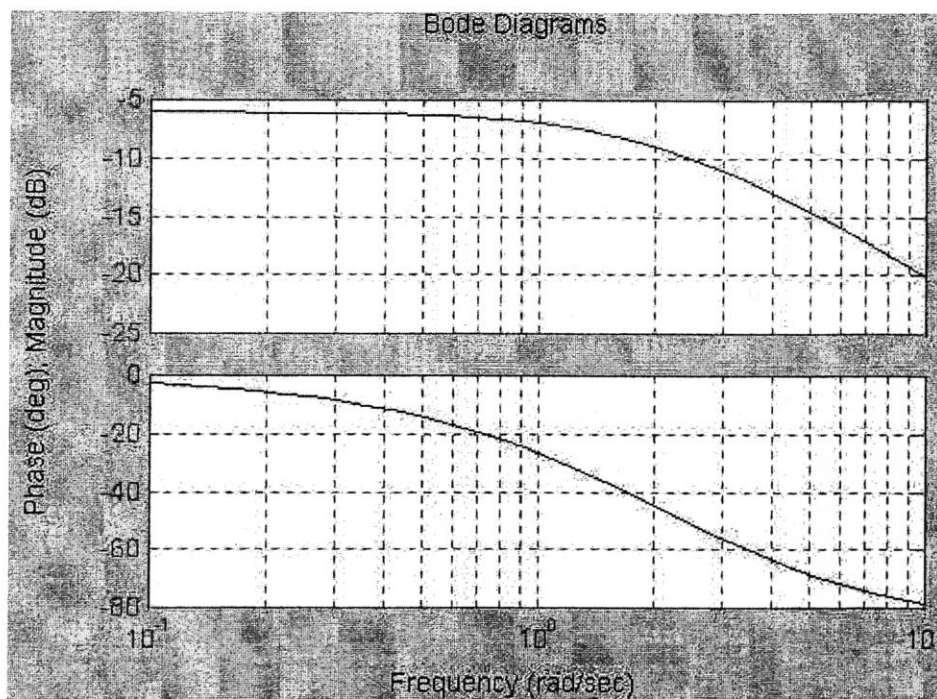
Factor $(j\omega/4) + 1$



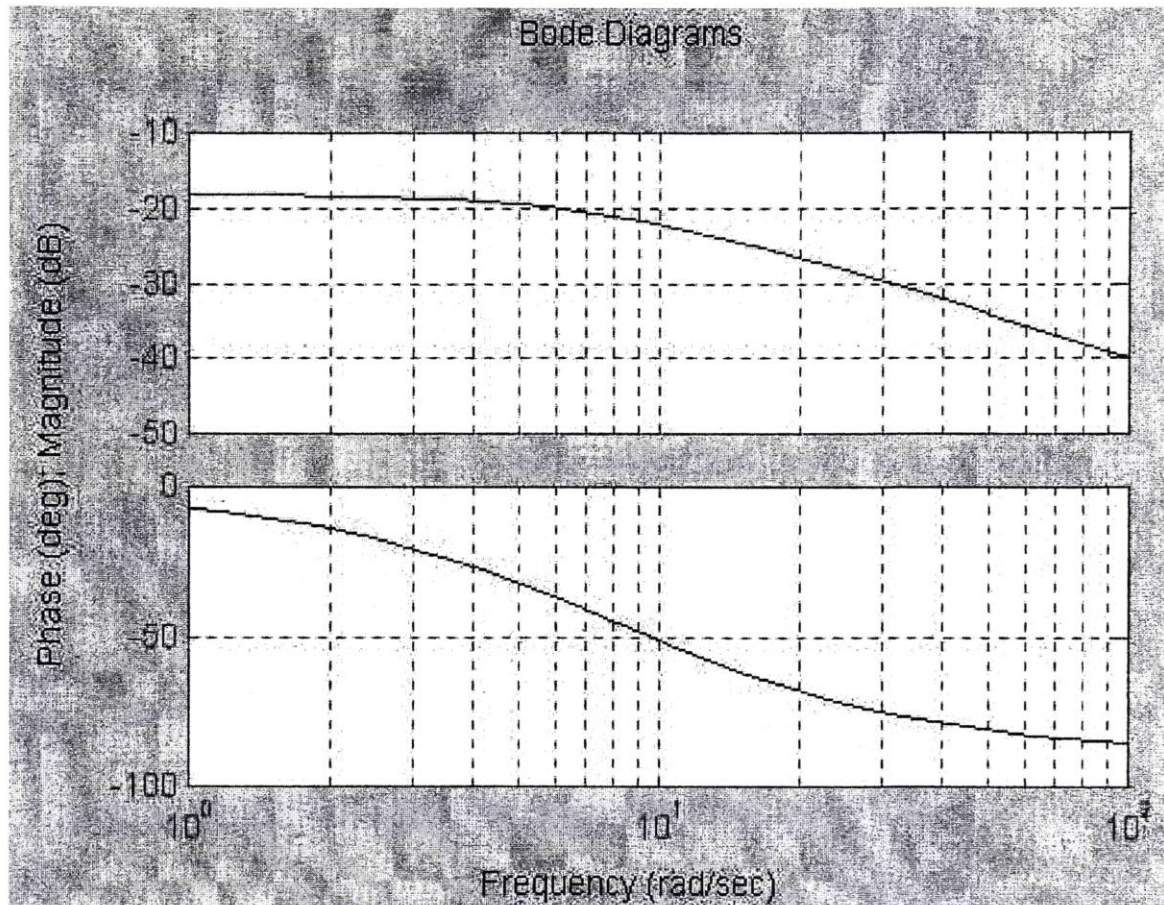
Factor $(j\omega)^{-1}$



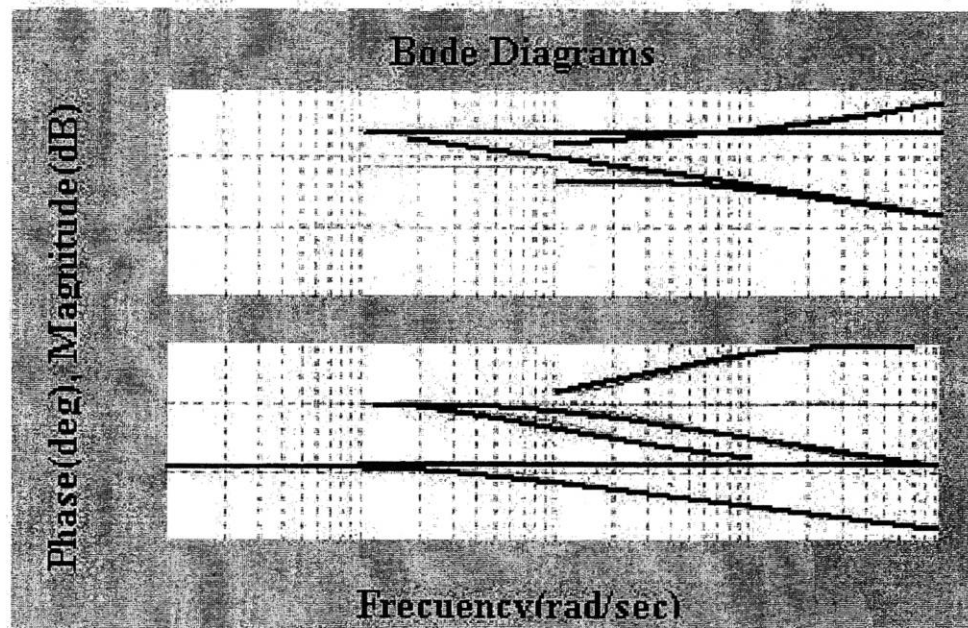
Factor $((j\omega/2) + 1)^{-1}$



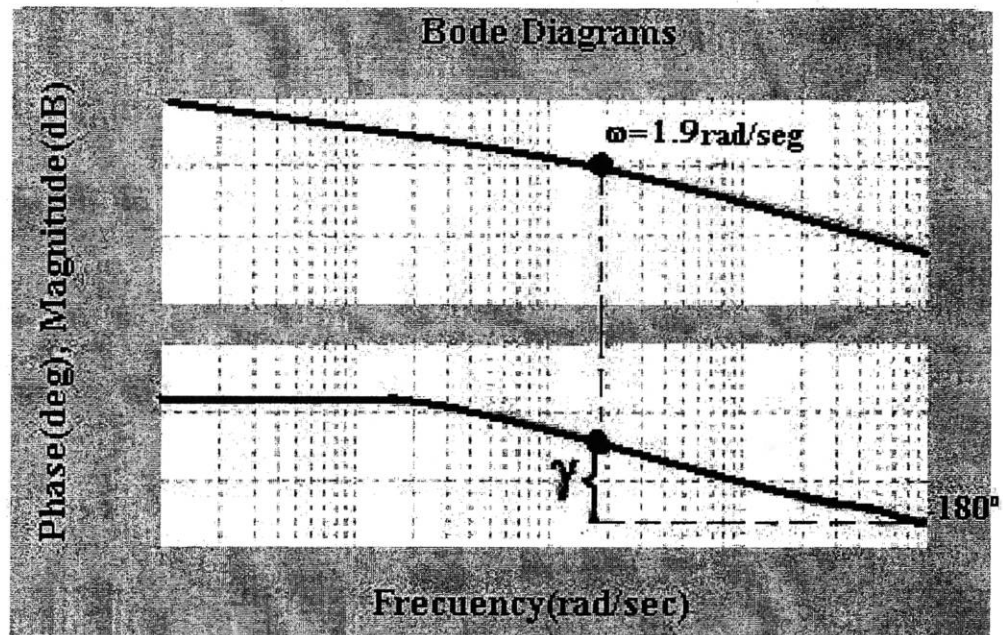
Factor $(j\omega/8 + 1)^{-1}$



Superponiendo todas las gráficas anteriores

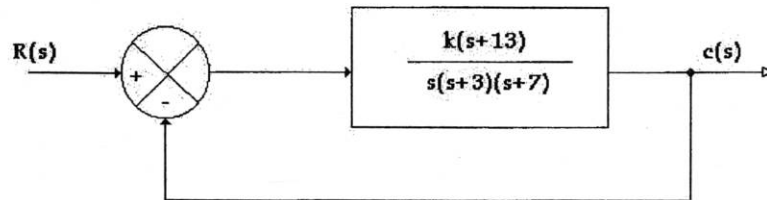


Y sumando se obtiene la siguiente gráfica



Frecuencia de cruce de ganancia $\omega_1 = 1.9 \text{ rad/seg}$
 Margen de Fase (γ) = 60°

7. Considere el sistema de la retroalimentación de la siguiente figura. Dibuje los diagramas de Bode de la función de transferencia de lazo abierto. Determine el margen de fase y el margen de ganancia y establezca la estabilidad absoluta.



Sistema de control con retroalimentación unitaria

De la figura se ve que:

$$G(s) = \frac{k(s+13)}{s(s+3)(s+7)}$$

Y

$$H(s) = 1$$

Tomamos la función de transferencia de lazo abierto

$$GH(s) = G(s)$$

Normalizamos $GH(s)$ para obtener la representación en constantes de tiempo

$$GH(s) = \frac{13k(\frac{s}{13} + 1)}{21s(\frac{s}{3} + 1)(\frac{s}{7} + 1)} = \frac{(\frac{13k}{21})(\frac{s}{13} + 1)}{s(\frac{s}{3} + 1)(\frac{s}{7} + 1)}$$

Para $k = 5$

$$G(s) = \frac{3.09 \left(\frac{s}{13} + 1 \right)}{s \left(\frac{s}{3} + 1 \right) \left(\frac{s}{7} + 1 \right)}$$

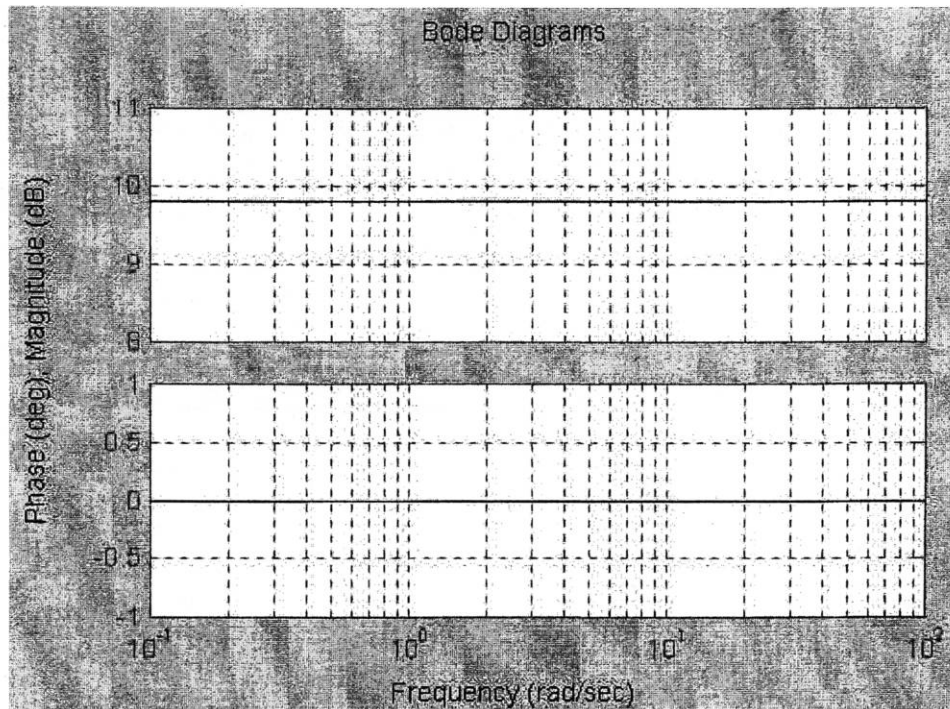
Hacemos $s = j\omega$

$$GH(j\omega) = \frac{3.09 \left(\frac{j\omega}{13} + 1 \right)}{j\omega \left(\frac{j\omega}{3} + 1 \right) \left(\frac{j\omega}{7} + 1 \right)}$$

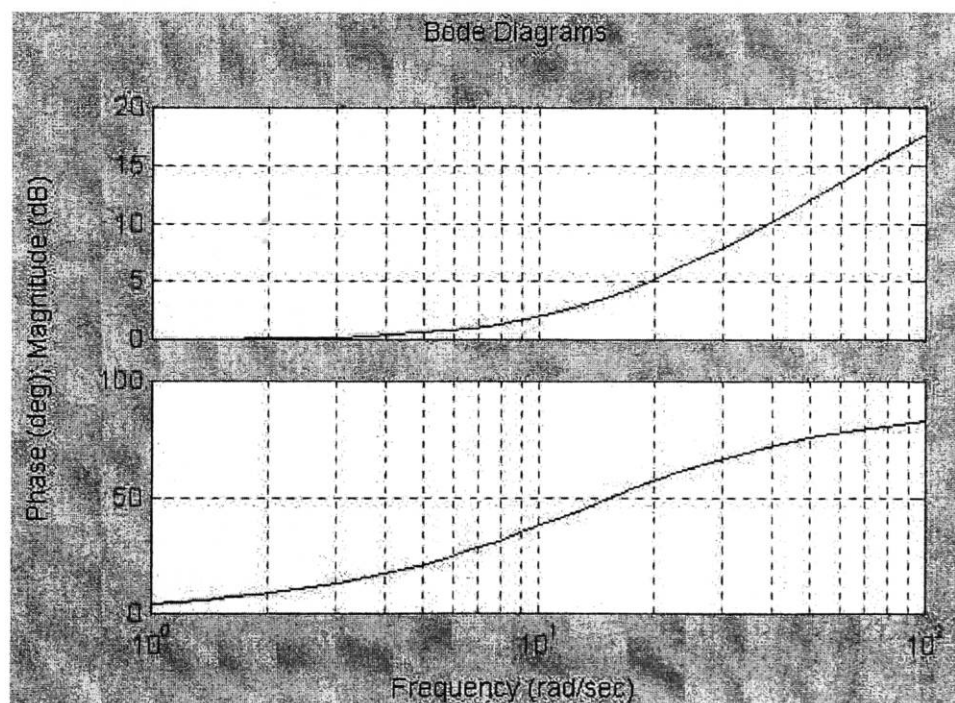
Tabla 7.- Factores del sistema para el problema 7

Factor	Magnitud/Pendiente	Fase
3.09	$20 \log 3.09 = 9.79 \text{ db}$	0°
$(j\omega/13) + 1$	$\omega_c = 13$ 20 db/dec	$0^\circ : \omega_1 = \omega_c/5 = 2.6$ $90^\circ : \omega_2 = 5\omega_c = 65$
$(j\omega)^{-1}$	$\omega_c = 1$ -20 db/dec	-90°
$((j\omega/3) + 1)^{-1}$	$\omega_c = 3$ -20 db/dec	$0^\circ : \omega_1 = \omega_c/5 = 0.6$ $-90^\circ : \omega_2 = 5\omega_c = 15$
$((j\omega/7) + 1)^{-1}$	$\omega_c = 7$ -20 db/dec	$0^\circ : \omega_1 = 1.4$ $-90^\circ : \omega_2 = 35$

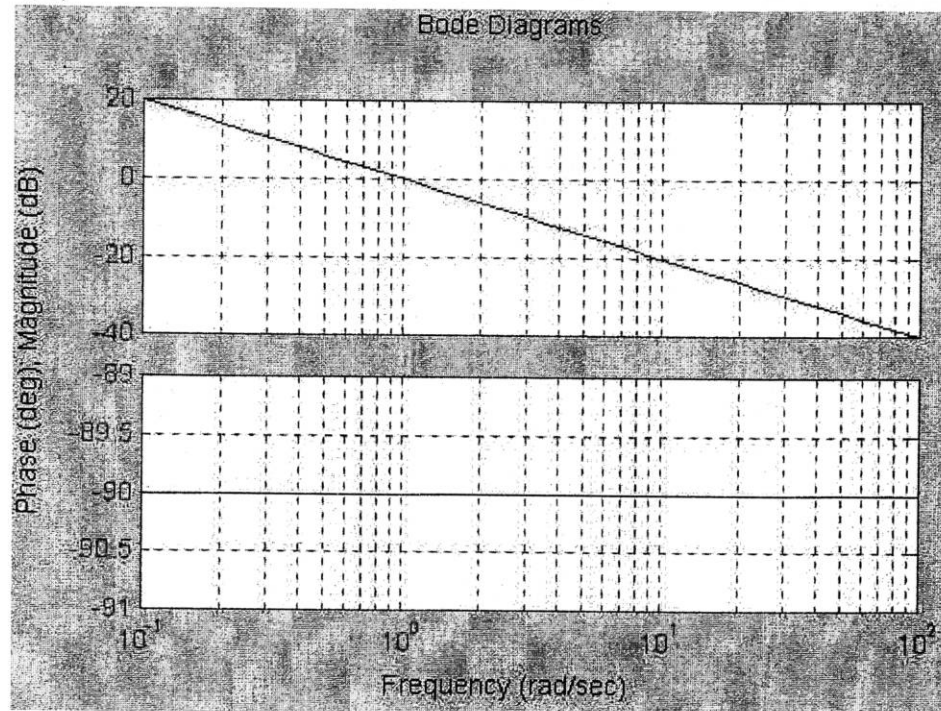
Factor: 3.09



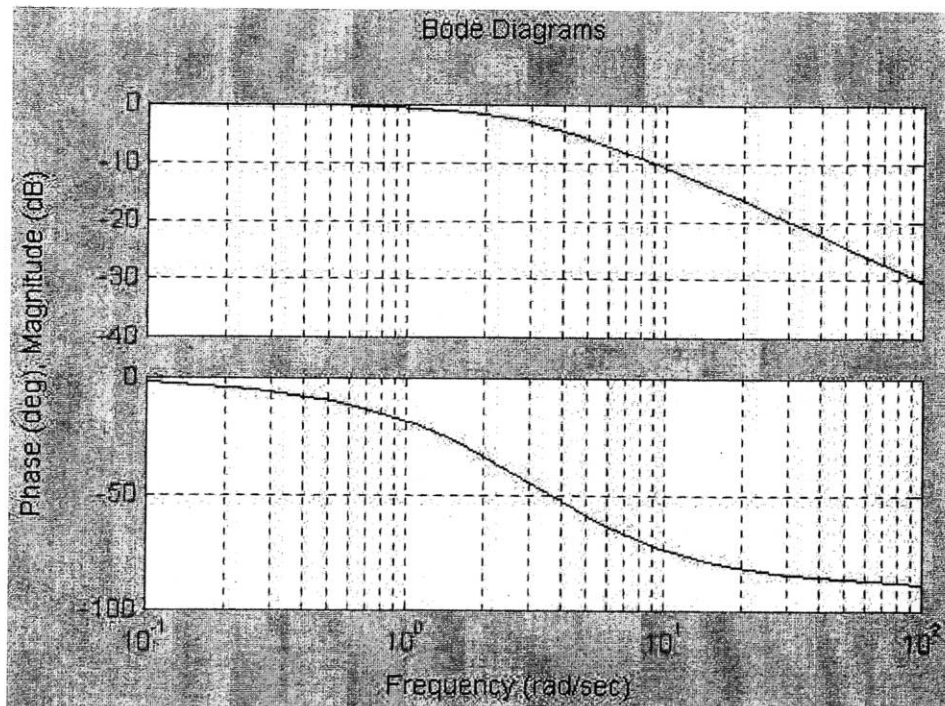
Factor ($j\omega/13+1$):



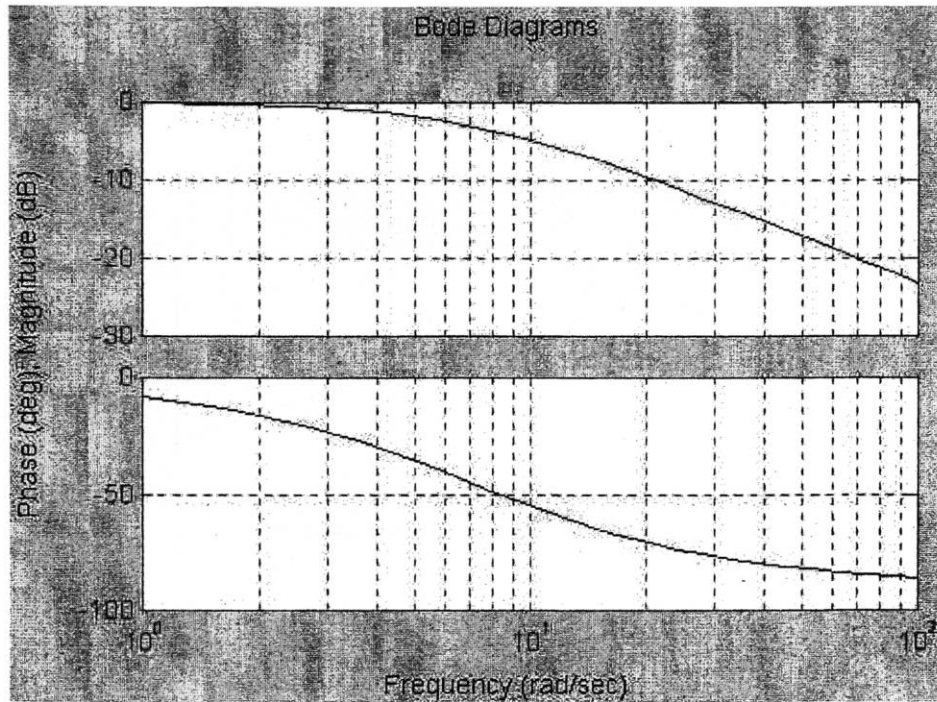
Factor: $(j\omega)^{-1}$



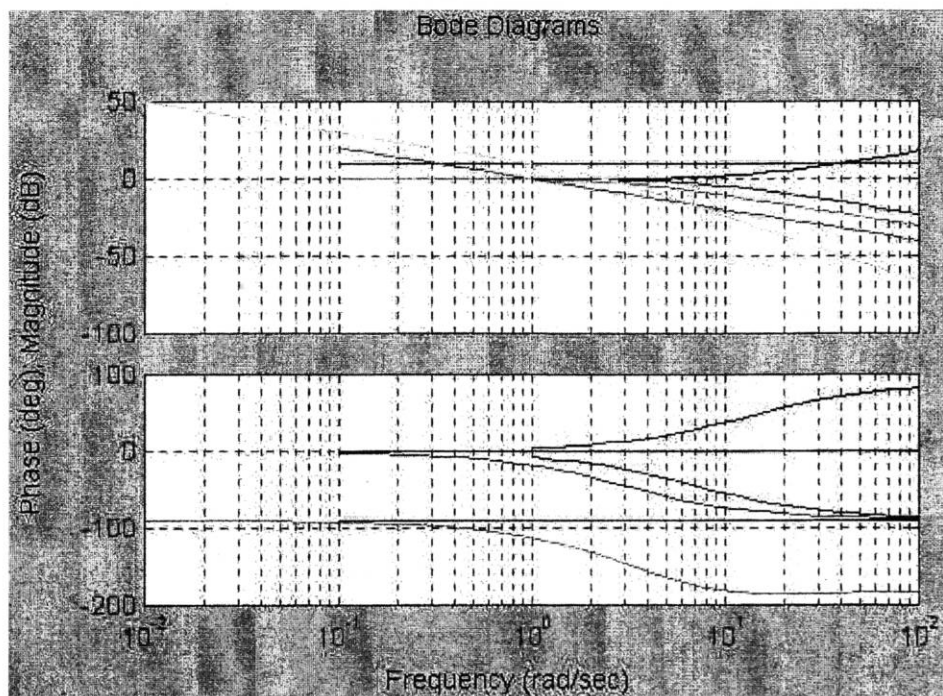
Factor: $(j\omega/3 + 1)^{-1}$



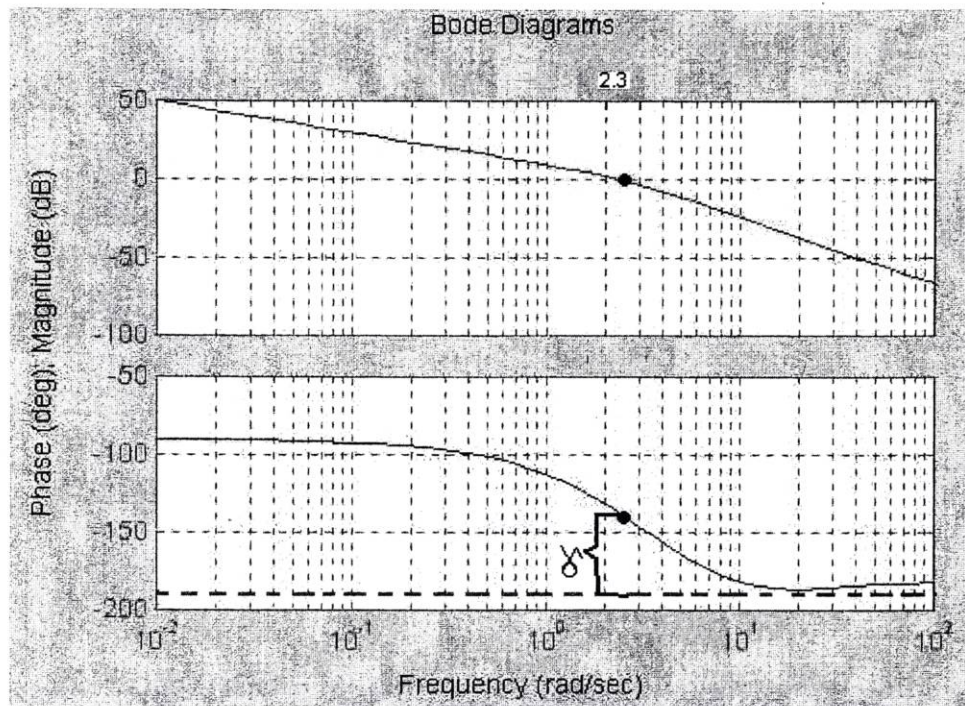
Factor: $(j\omega/7 + 1)^{-1}$



Superponiendo las gráficas anteriores en una sola gráfica:



Sumando todas las gráficas anteriores obtenemos la siguiente gráfica final:



Frecuencia de cruce de fase no localizada.

Margen de Ganancia (K_g) = $+\infty$

Frecuencia de cruce de ganancia = 2.34 rad/s

Margen de Fase (γ) = 43.64°

El sistema es estable.

8. Dibuje los diagramas de Bode de la función de transferencia de lazo abierto y determine la estabilidad relativa y absoluta del sistema de retroalimentación.

$$GH(s) = \frac{50}{s(s+4)(s+6)}$$

Normalizando:

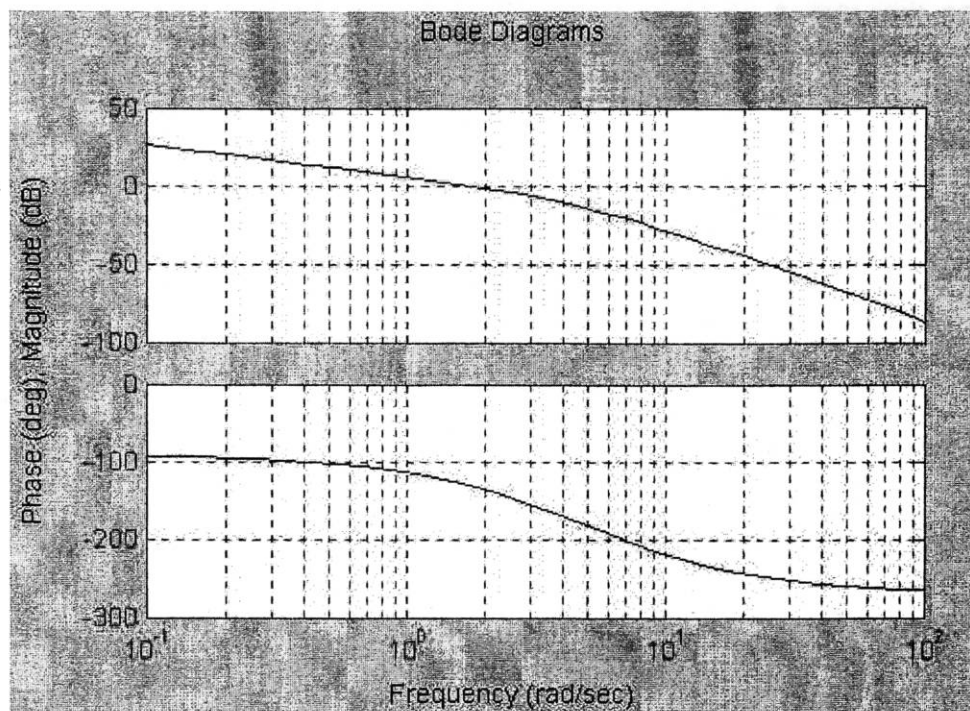
$$GH(s) = \frac{50}{24s(\frac{s}{4}+1)(\frac{s}{6}+1)} = \frac{2.083}{s(\frac{s}{4}+1)(\frac{s}{6}+1)}$$

Expresando el sistema en forma isócrona:

$$GH(s) = \frac{2.083}{j\omega(\frac{j\omega}{4}+1)(\frac{j\omega}{6}+1)}$$

Tabla 10.- Factores del sistema $G(s)=50/[s(s+4)(s+6)]$ con $H(s)=1$

Factor	Magnitud/Pendiente	Fase
2.083	6.373 db	0°
$(j\omega)^{-1}$	$\omega_c = 1$ rad/seg -20 db/dec	-90°
$((j\omega/4) + 1)^{-1}$	$\omega_c = 4$ rad/seg -20 db/dec	0° : $\omega_1 = 0.8$ rad/seg -90° : $\omega_2 = 20$ rad/seg
$((j\omega/6) + 1)^{-1}$	$\omega_c = 6$ rad/seg -20 db/dec	0° : $\omega_1 = 1.2$ rad/seg -90° : $\omega_2 = 30$ rad/seg



Diagramas de Bode para el sistema $G(s) = 50/[s(s+4)(s+6)]$ con $H(s)=1$

Frecuencia de transición de fase $\omega_{\pi}=4.8989$ rad/seg.

Margen de Ganancia (Kg) = 4.79

Frecuencia de transición de ganancia $\omega_1=1.8157$ rad/seg.

Margen de Fase (γ) = 48.7485°.

El sistema es estable.

9. Dibuje los diagramas de bode de la función de transferencia de lazo abierto. Determine el margen de fase y el margen de ganancia y establezca la estabilidad absoluta.

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 3s + 64}$$

$$H(s) = s + 2$$

La función de transferencia en lazo abierto es:

$$GH(s) = \frac{100(s+2)}{s^2 + 3s + 64}$$

Normalizando la función de transferencia :

$$GH(s) = \frac{200\left(\frac{s}{2} + 1\right)}{64\left(\frac{s^2}{64} + \frac{3s}{64} + 1\right)} = \frac{3.125\left(\frac{s}{2} + 1\right)}{\frac{s^2}{64} + \frac{3s}{64} + 1}$$

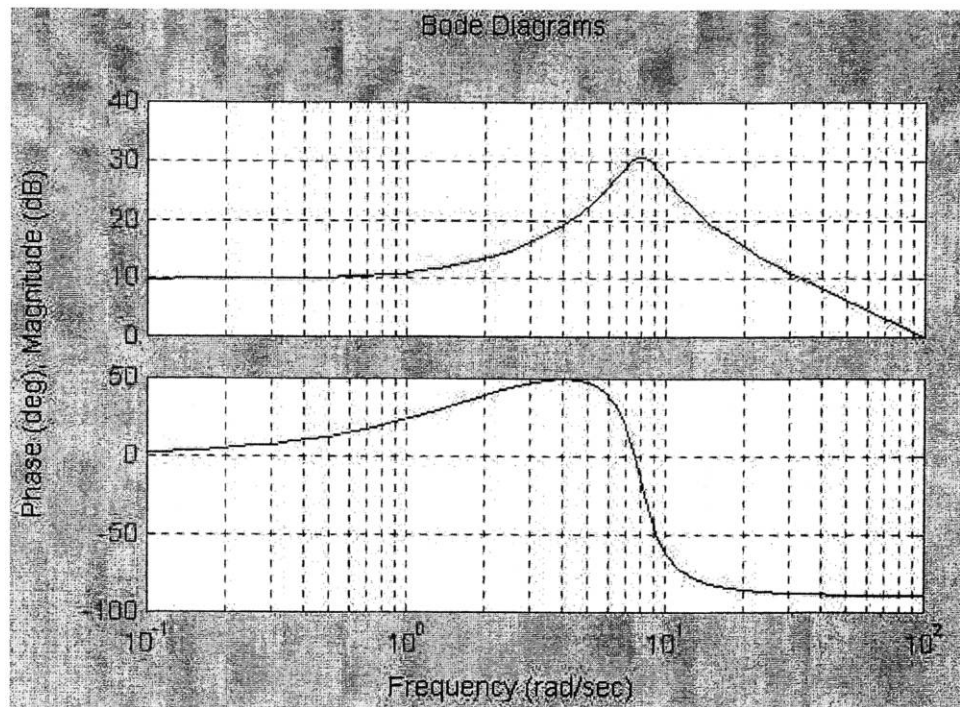
Hacemos $s = j\omega$

$$GH(j\omega) = \frac{3.125\left(\frac{j\omega}{2} + 1\right)}{\frac{(j\omega)^2}{64} + \frac{3j\omega}{64} + 1}$$

Factores del sistema $G(s)=100/(s^2+3s+64)$ con $H(s)=s+2$

Factor	Magnitud	Fase
3.125	9.897 dB	0°
$(j\omega/2)+1$	$\omega_c=2$ rad/seg Pendiente=20 dB/dec	0°: $\omega_1=0.4$ rad/seg 90°: $\omega_2=10$ rad/seg
$((j\omega)^2/64) + (3j\omega/64) + 1$	$\omega_c=64$ rad/seg Pendiente =-20 dB/dec	0°: $\omega_1=1.6$ rad/seg. -90°: $\omega_2=40$ rad/seg

2892913



Diagramas de Bode para el sistema $G(s)=100/(s^2+3s+64)$ con $H(s)=s+2$

Frecuencia de cruce de ganancia $\omega=100.611$.

Margen de Fase (γ) = 90.58°

El sistema es estable

10. Dibuje los diagramas de bode de la función de transferencia de lazo abierto. Determine el margen de fase y el margen de ganancia y establezca la estabilidad absoluta.

$$GH(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+2)} = \frac{4}{2s(s+1)\left(\frac{s}{2}+1\right)} = \frac{\frac{4}{2}}{s(s+1)\left(\frac{s}{2}+1\right)} = \frac{2}{s(s+1)\left(\frac{s}{2}+1\right)}$$

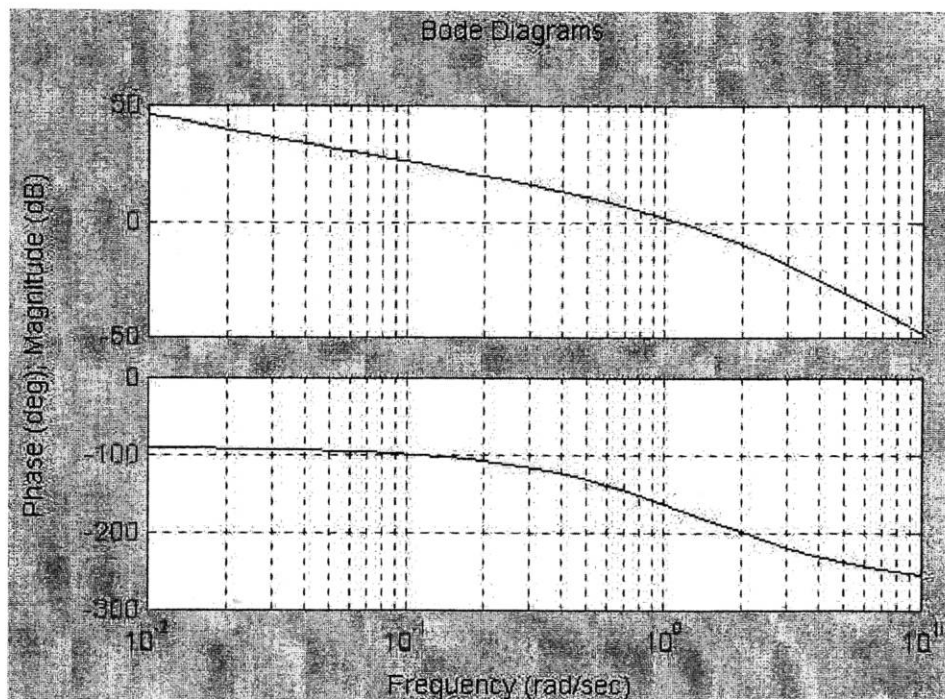
Como no se proporciona dato para $H(s)$, la consideramos unitaria.
En constantes de tiempo:

$$GH(j\omega) = \frac{2}{j\omega(j\omega+1)\left(\frac{j\omega}{2}+1\right)}$$

Factores para el sistema $G(s)=4/[s(s+1)(s+2)]$

Factor	Magnitud	Fase
2	$20 \log 2=6.02$	0°
$(j\omega)^{-1}$	$\omega_c = 1$ Pendiente = -20 dB/dec	-90°
$(j\omega+1)^{-1}$	$\omega_c = 1$ Pendiente = -20 dB/dec	-90°
$((j\omega/2) + 1)^{-1}$	$\omega_c = 2$ Pendiente = 2 dB/dec $\omega_c = 2$ Pendiente = -22 dB/dec	0° : $\omega_1=0.4$ rad/seg. -90° : $\omega_2=10$ rad/seg.

A continuación observamos los diagramas de fase vs frecuencia y ganancia vs frecuencia



Diagramas de Bode para el sistema

Frecuencia de transición de fase $\omega_\pi=1.4142$ rad/seg.

Margen de Ganancia (K_g) =3.52182.

Frecuencia de transición de ganancia $\omega_1=1.1432$ rad/seg.

Margen de Fase (γ) =11.4254°

El sistema es estable.

11. Dibuje los diagramas de bode de la función de transferencia de lazo abierto. Determine el margen de fase y el margen de ganancia y establezca la estabilidad absoluta.

$$G(s) = \frac{20(s+5)}{(s^2 + 6s + 25)} \quad H(s) = \frac{1}{s}$$

La función de transferencia en lazo abierto es:

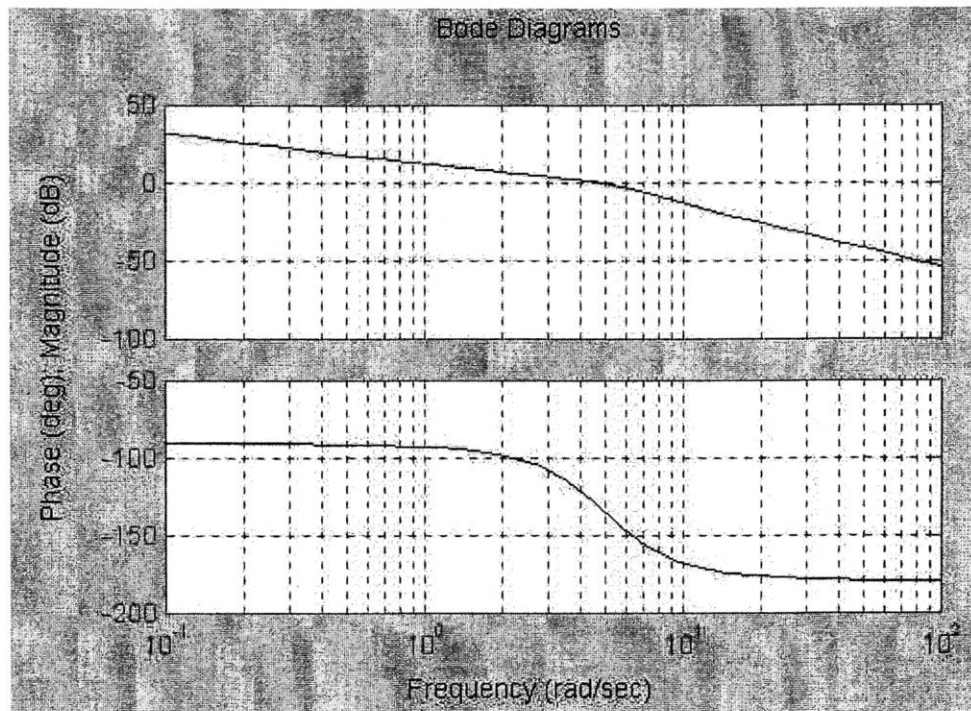
$$GH(s) = \frac{20(s+5)}{s(s^2 + 6s + 25)}$$

Normalizando la función obtenemos

$$GH(s) = \frac{100\left(\frac{s}{5} + 1\right)}{25s\left(\frac{s^2}{25} + \frac{6s}{25} + 1\right)} = \frac{4\left(\frac{s}{5} + 1\right)}{s\left(\frac{s^2}{25} + \frac{6s}{25} + 1\right)}$$

Haciendo $s = j\omega$

$$GH(j\omega) = \frac{4\left(\frac{j\omega}{5} + 1\right)}{j\omega\left(\frac{(j\omega)^2}{25} + \frac{6j\omega}{25} + 1\right)} = \frac{4\left(\frac{j\omega}{5} + 1\right)}{j\omega\left(1 + \frac{6j\omega}{25} - \omega^2\right)}$$



Diagramas de Bode para el sistema $G(s)=20(s+5)/(s^2+6s+25)$ con $H(s)=1/s$

Margen de ganancia (K_g) = ∞

Margen de fase (γ) = 47.703°

El sistema es estable.

I.2 GRÁFICAS POLARES O DE NYQUIST

12. Dibuje la Gráfica de Nyquist de la siguiente función de transferencia.

$$G(s) = \frac{1}{s+2} = \frac{1}{j\omega+2}$$

La forma polar del sistema es:

$$|G(s)| = \frac{1}{j\omega+2} \angle -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

La siguiente tabla muestra las diferentes magnitudes y fases para diferentes valores de _

Magnitud y fase para diversos valores de frecuencia

	Magnitud	Fase (°)
0	$1/2 = .5$	0
1	$1/\sqrt{5} = 0.447$	-26.56
2	$1/\sqrt{8} = 0.353$	-45
4	$1/\sqrt{20} = 0.223$	-63.43
10	$1/\sqrt{104} = 0.098$	-78.69
∞	$1/\infty$	-90

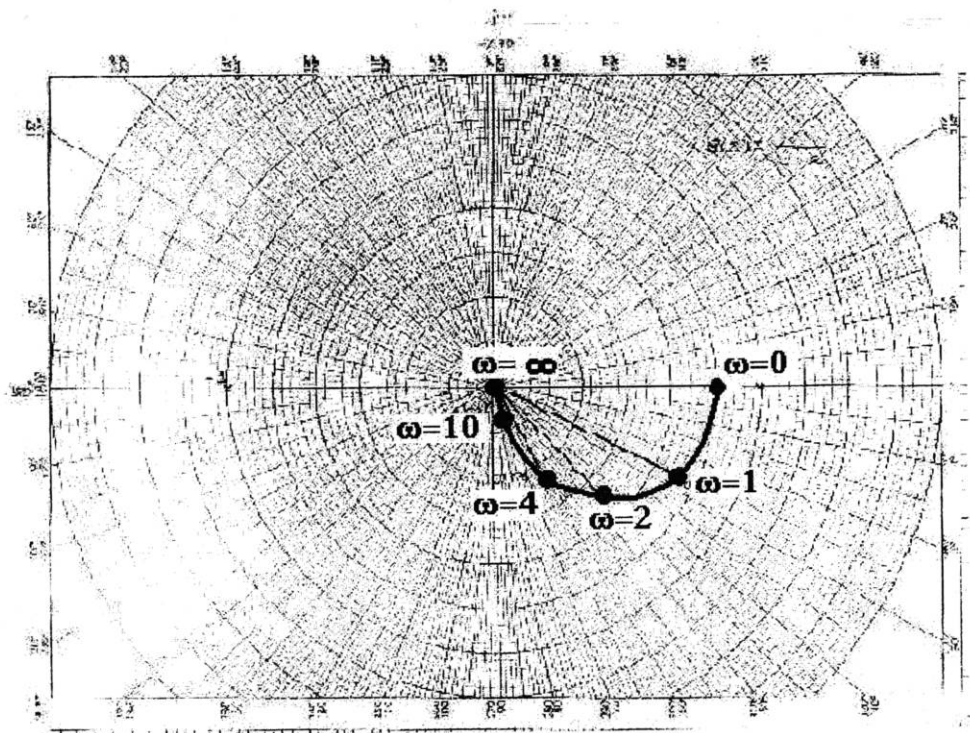


Diagrama de Nyquist del sistema $G(s)=1/(s+2)$

13. Dibuje la gráfica de Nyquist de la siguiente función de transferencia.

$$G(s) = \frac{3(1-s)}{3+5s+2s^2}$$

Factorizamos el denominador para llevarlo a la forma de Bode

$$G(s) = \frac{3(1-s)}{(3+2s)(1+s)}$$

Haciendo $s=j\omega$

$$G(j\omega) = \frac{3(1-j\omega)}{(3+2j\omega)(1+j\omega)}$$

La magnitud y la fase son:

$$|G(j\omega)| = \frac{3\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{(9+4\omega^2)}\sqrt{1+\omega^2}} \angle -2\tan^{-1}\omega - \tan^{-1}\left(\frac{2\omega}{3}\right)$$

$$|G(j\omega)| = \frac{3}{\sqrt{(9+4\omega^2)}} \angle -2\tan^{-1}\omega - \tan^{-1}\left(\frac{2\omega}{3}\right)$$

Observe que en la expresión anterior la fase de numerador es $-\tan^{-1}(\omega)$, porque el factor es $(1-j\omega)$

Tabulando para ω _obtenemos la siguiente tabla:

Magnitud y ganancia para diversos valores de ω

Frecuencia ω	Magnitud	Fase
0	1	0°
1	0.832	-123.690
2	0.6	180°
4	0.351	-221.37
10	0.148	-250.047
100	0.0149	-267.994
1000	0.00149	-269.799
∞	0	-270

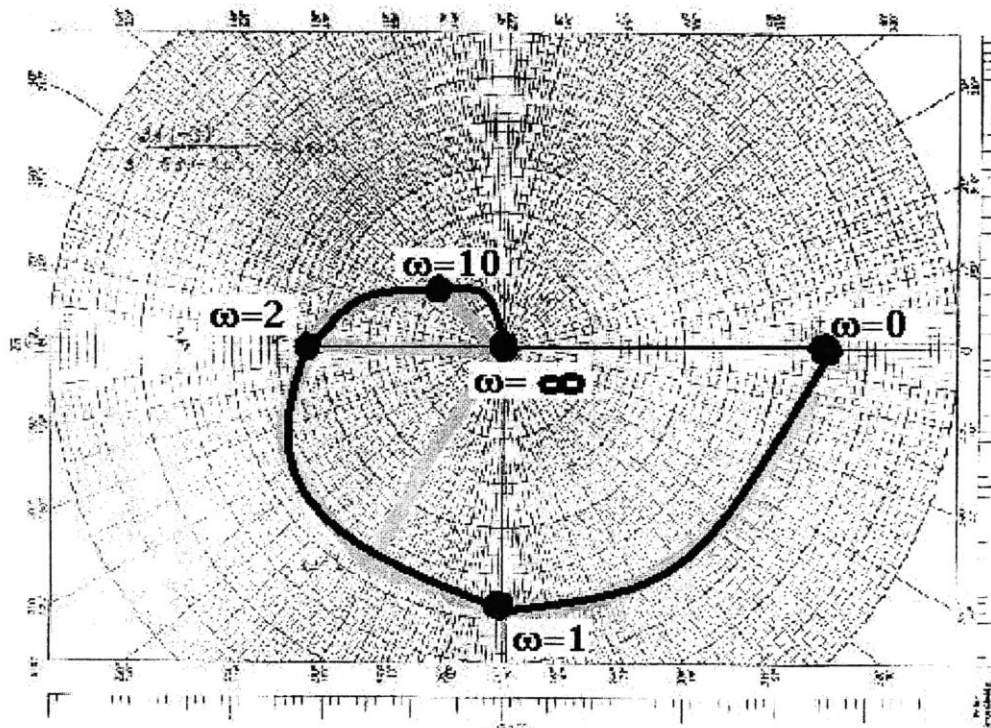


Diagrama de Nyquist para el sistema $G(s)=3(1-s)/(3+5s+2s^2)$

14. Dibuje la gráfica de Nyquist para la siguiente función de transferencia.

$$GH(s) = \frac{32}{s(s+4)(s+8)}$$

Haciendo $s=j\omega$

$$GH(j\omega) = \frac{32}{j\omega(j\omega+4)(j\omega+8)}$$

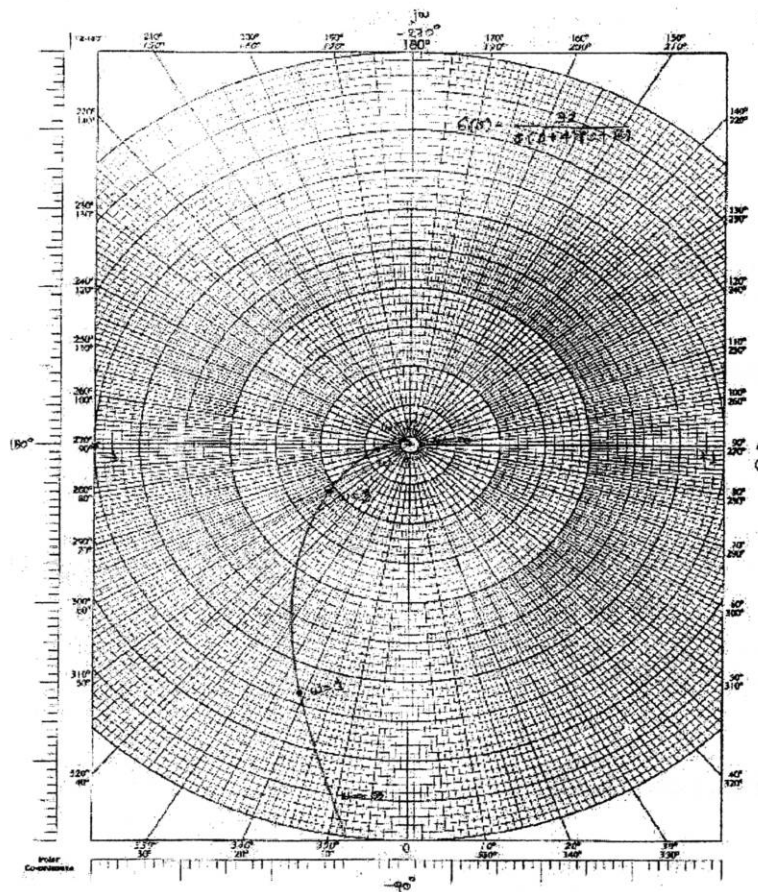
Expresando $GH(j\omega)$ como magnitud y fase:

$$|GH(j\omega)| = \frac{32}{\omega \sqrt{(\omega^2+16)} \sqrt{(\omega^2+64)}} \angle -90^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{4}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{8}\right)$$

Magnitud y fase para valores de ω

ω	Magnitud	Fase ($^\circ$)
0	∞	-90
1	$32/\sqrt{17}\sqrt{65} = 0.96$	-111.15
3	$32/(3\sqrt{25}\sqrt{73}) = 0.249$	-147.41
5	$32/(5\sqrt{41}\sqrt{89}) = 0.105$	-173.34
10	$32/(10\sqrt{16}\sqrt{164}) = 0.02$	-209.53
25	$32/(25\sqrt{641}\sqrt{689}) = 0.0019$	-243.15
∞	0	-270

Los datos obtenidos se pueden graficar para cada valor de ω obteniéndose la siguiente gráfica:



Gráfica de Nyquist del sistema $GH(s)=32/[s(s+4)(s+8)]$

15. Dibuje la gráfica de Nyquist para la siguiente función de transferencia de lazo abierto y determine la estabilidad del sistema de retroalimentación.

$$GH(s) = \frac{s + 6}{(s + 3)(s + 1)}$$

Haciendo $s = j\omega$

$$GH(j\omega) = \frac{j\omega + 6}{(j\omega + 3)(j\omega + 1)}$$

En forma polar:

$$|GH(j\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2 + 36}}{\sqrt{\omega^2 + 9}\sqrt{\omega^2 + 1}} \angle \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{6}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{3}\right) - \tan^{-1}\omega$$

Magnitud y fase para diferentes valores de ω

ω	Magnitud	Fase ($^\circ$)
0	$\sqrt{36}/(\sqrt{9}\sqrt{1}) = 2$	0
1	$\sqrt{37}/(\sqrt{10}\sqrt{2}) = 1.36$	-53.97
2	$\sqrt{40}/(\sqrt{13}\sqrt{5}) = 0.784$	-78.69
5	$\sqrt{61}/(\sqrt{34}\sqrt{26}) = 0.2626$	-97.92
10	$\sqrt{136}/(\sqrt{109}\sqrt{101}) = 0.111$	-98.55
25	$\sqrt{661}/(\sqrt{634}\sqrt{626}) = 0.04$	-94.35
∞	0	-90

La gráfica obtenida es la siguiente:

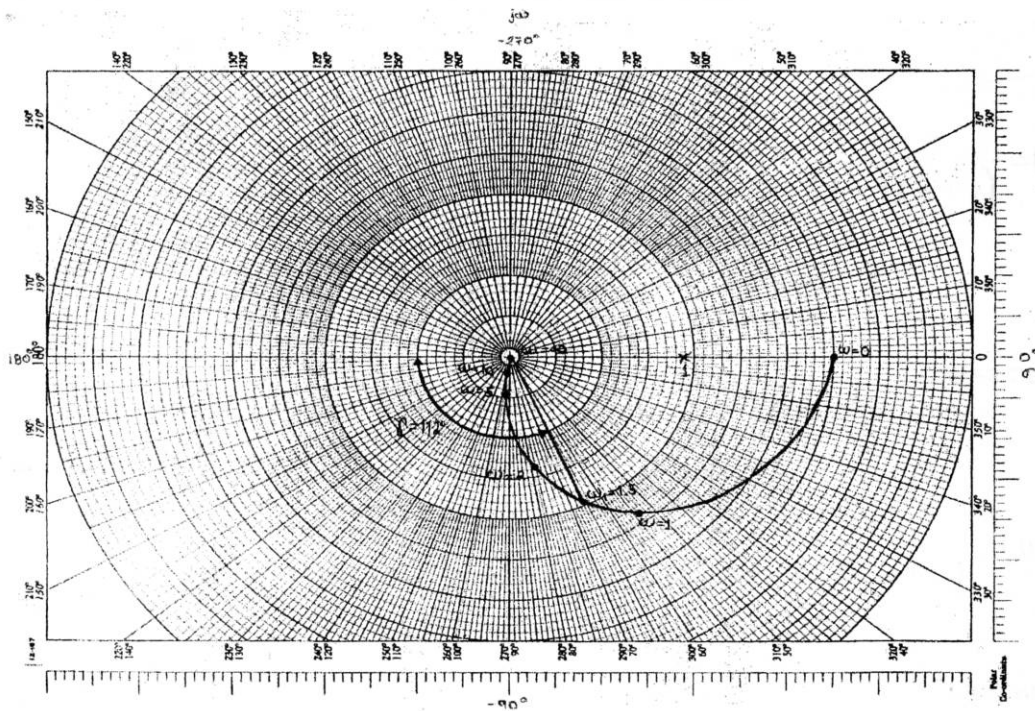


Diagrama de Nyquist del sistema $GH(s) = \frac{(s+6)}{(s+3)(s+1)}$

Margen de Fase (γ) = 112°

Margen de Ganancia (K_g) = ∞

El sistema es estable

16. Dibuje la gráfica de Nyquist para la siguiente función de transferencia de lazo abierto y determine la estabilidad del sistema de retroalimentación.

$$GH(s) = \frac{12(s+2)}{(s^2+4s+3)}$$

Hacemos $s = j\omega$

$$GH(j\omega) = \frac{12(j\omega+2)}{(j\omega+1)(j\omega+3)}$$

en forma polar se tiene:

$$|G(j\omega)| = \frac{12(\omega^2+4)}{\sqrt{(\omega^2+1)}\sqrt{(\omega^2+9)}} \angle \tan^{-1} \frac{\omega}{2} - \tan^{-1} \omega - \tan^{-1} \frac{\omega}{3}$$

A continuación se presenta una tabla con diferentes valores para ω .

Magnitud y fase para valores de ω

Frecuencia	Magnitud	Fase
0.5	7.275	-21.991°
1	6	-36.8699°
5	2.173	-69.528°
10	1.166	-78.899°
25	0.4777	-85.44°
50	0.2397	-87.711°
100	0.1199	-88.854°
1000	0.011999	-89.885°
∞	0	-90°

A continuación se muestra la gráfica de este sistema

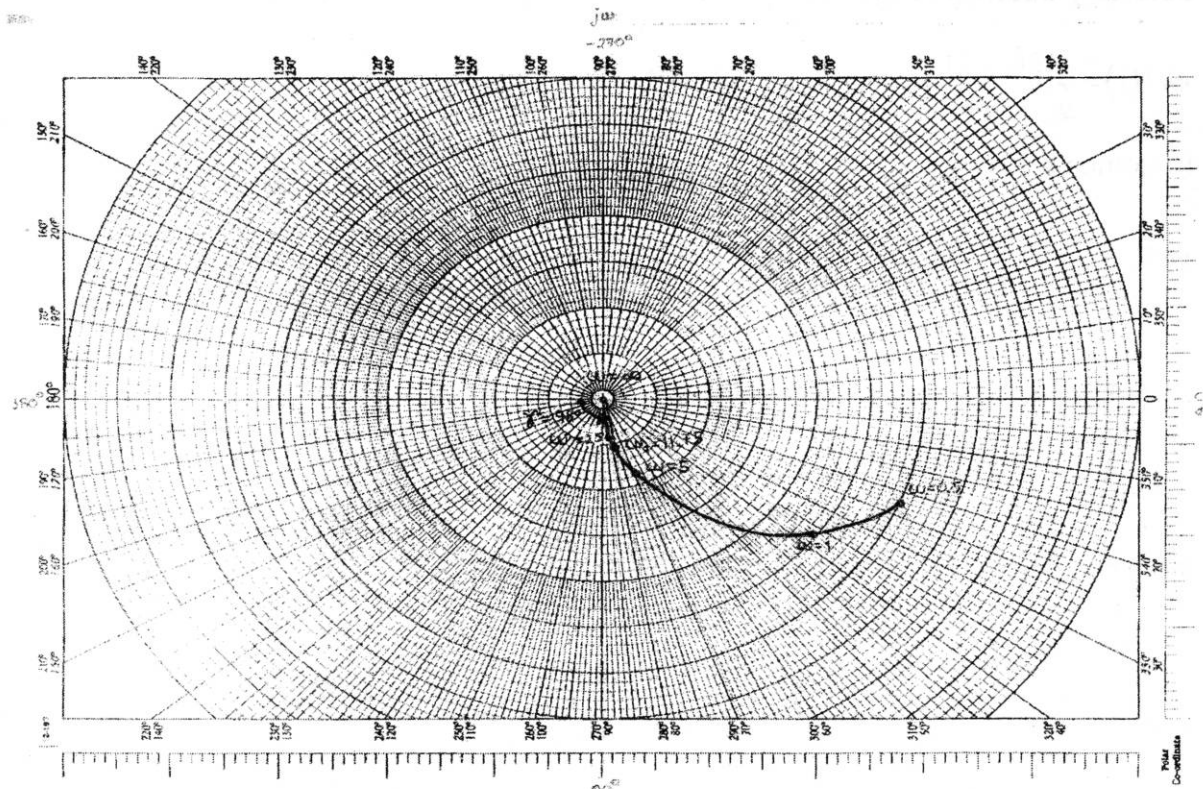


Diagrama de Nyquist para el sistema $G(s)=12(s+2)(s^2+4s+3)$

Margen de Fase (γ) = 98°

Margen de Ganancia (K_g) = ∞

El sistema es estable

17. Dibuje la gráfica de Nyquist para la siguiente función de transferencia de lazo abierto y determine la estabilidad del sistema de retroalimentación.

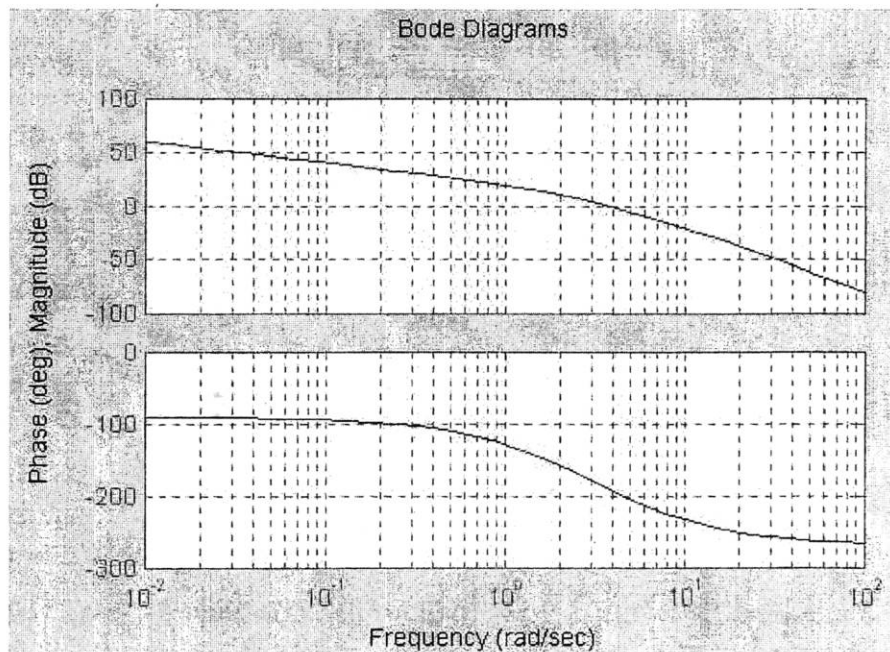
$$GH(s) = \frac{10}{s(1 + 0.2s)(1 + 0.5s)}$$

Haciendo $s=j\omega$

$$GH(s) = \frac{10}{j\omega(1 + 0.2j\omega)(1 + 0.5j\omega)}$$

La magnitud del sistema vale:

$$|GH(s)| = \frac{10}{\omega \sqrt{(1 + 0.04\omega^2)} \sqrt{(1 + 0.25\omega^2)}} \angle -90 - \tan^{-1} 0.2\omega - \tan^{-1} 0.5\omega$$



Magnitud y fase para ω

Frecuencia ω	Magnitud	Fase
0	∞	-90°
1	8.7705	-127.87°
4	0.8730	-192.094°
6	0.3374	-211.759°
10	0.0877	-232.125°
100	0.00009985	-265.991°
1000	0.00000009999855	-269.598°
∞	0	-270°

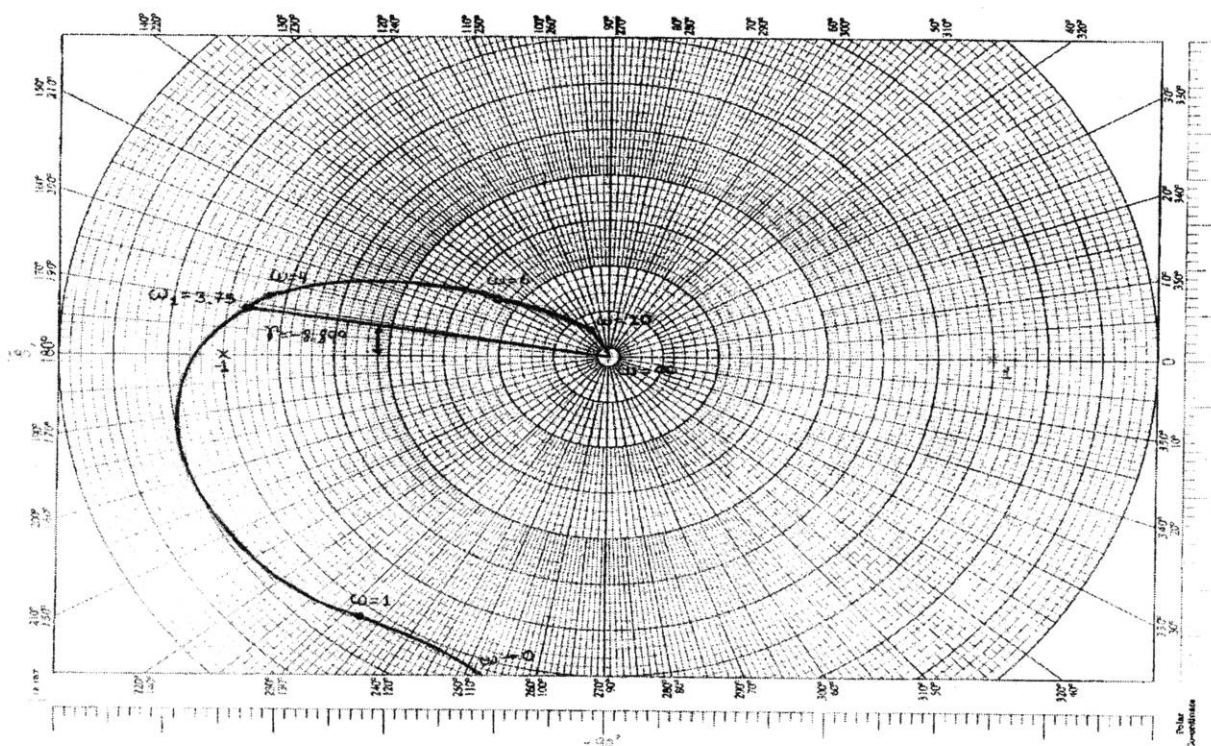


Diagrama de Nyquist para el sistema $G(s)=10/[s(1+0.2s)(1+0.5s)]$

Margen de Ganancia (K_g) = - 1.77

Margen de Fase (γ) = -8.89° .

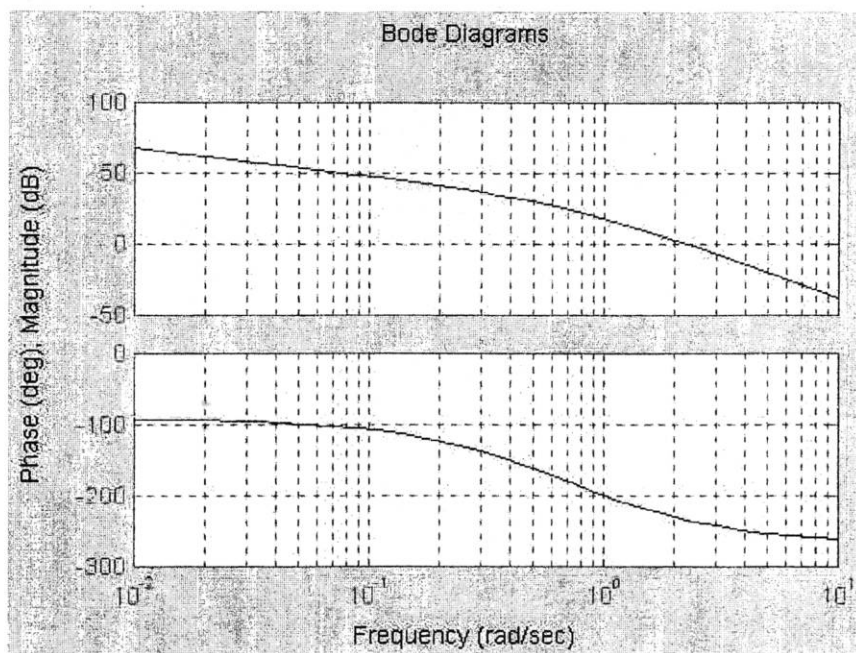
El sistema es inestable

18. Dibuje la gráfica de Nyquist para la siguiente función de transferencia de lazo abierto y determine la estabilidad del sistema de retroalimentación.

$$GH(s) = \frac{25}{s(s+1)(2s+1)} = \frac{25}{j\omega(j\omega+1)(2j\omega+1)}$$

La magnitud es:

$$|GH(s)| = \frac{25}{\omega \sqrt{(\omega^2 + 1)} \sqrt{(4\omega^2 + 1)}} \angle -90 - \tan^{-1}\omega - \tan^{-1}2\omega$$



2892913



9892913

Magnitud y fase para ω

Frecuencia ω	Magnitud	Fase
0	∞	-90°
1	7.905	-198.434°
5	0.0975	-252.979°
10	0.01242	-261.427°
100	0.00001249	-269.140°
1000	0.00000001249999	-269.9140°
∞	0	-270°

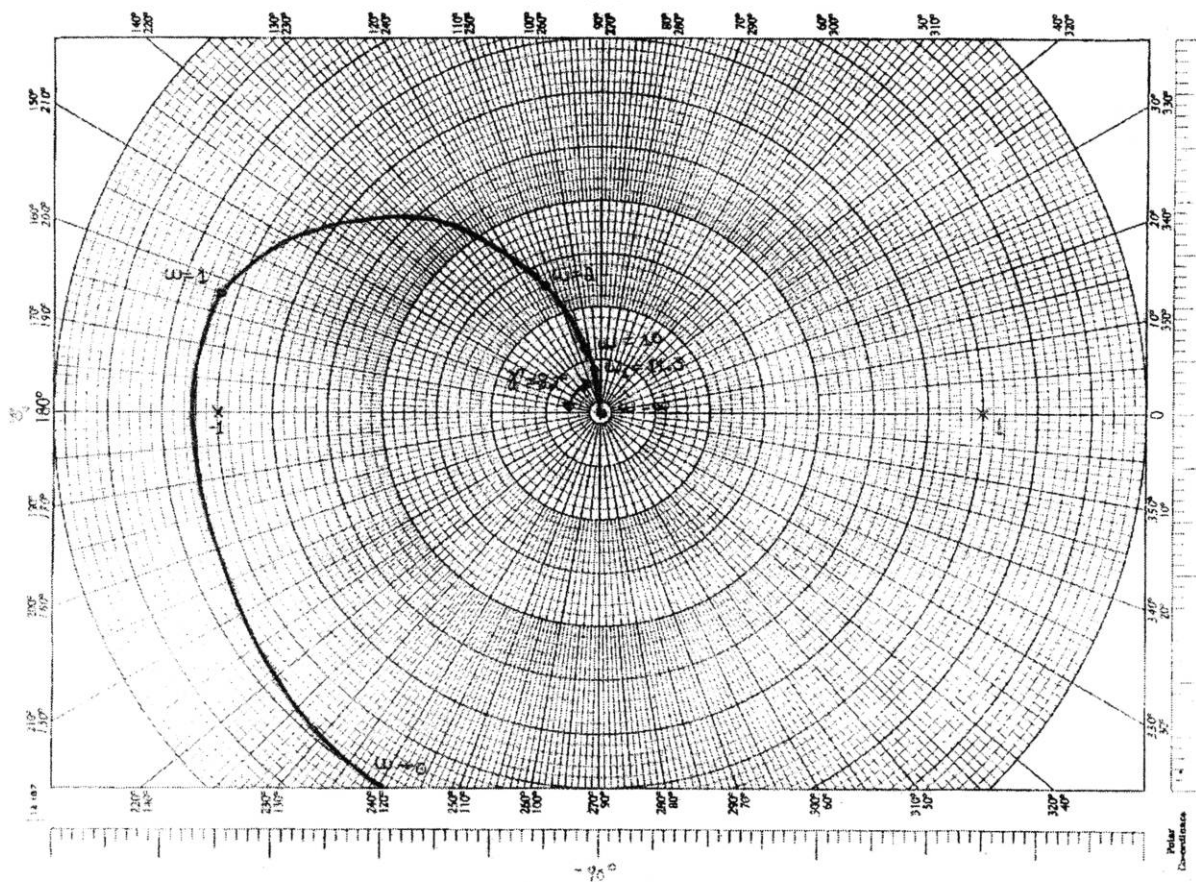


Diagrama de Nyquist para el sistema $GH(s)=25/[s(s+1)(2s+1)]$

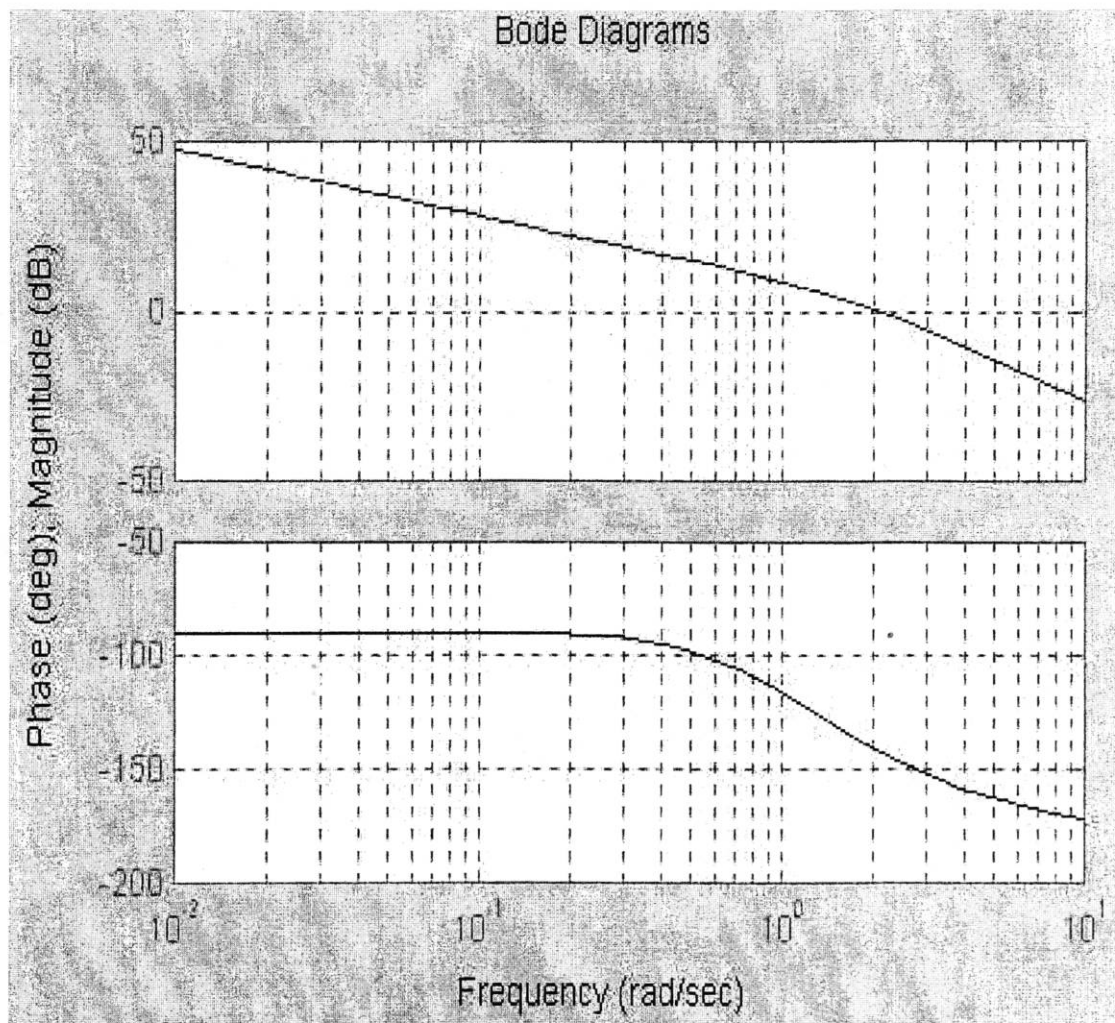
Margen de ganancia (K_g) = - 10
 Margen de fase (γ) = - 82°
 El sistema es inestable

19. Dibuje la gráfica de Nyquist para la siguiente función de transferencia de lazo abierto y determine la estabilidad del sistema de retroalimentación.

$$GH(s) = \frac{5(s+0.5)}{s(s^2+2s+1)} = \frac{5(s+0.5)}{s(s+1)(s+1)} = \frac{5(j\omega+0.5)}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+1)}$$

En forma polar:

$$|GH(j\omega)| = \frac{5\sqrt{\omega^2+0.25}}{\omega\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+1}} \angle -90 + \tan^{-1} \frac{\omega}{0.5} - 2 \tan^{-1} \omega$$



Magnitud y ganancia del sistema para diversos valores de ω

Frecuencia ω	Magnitud	Fase
0	∞	-90°
2	1.0307	-140.906°
5	0.1932	-163.090°
50	0.09997	-171.441°
100	0.049996	-179.1405°
∞	0	-180°

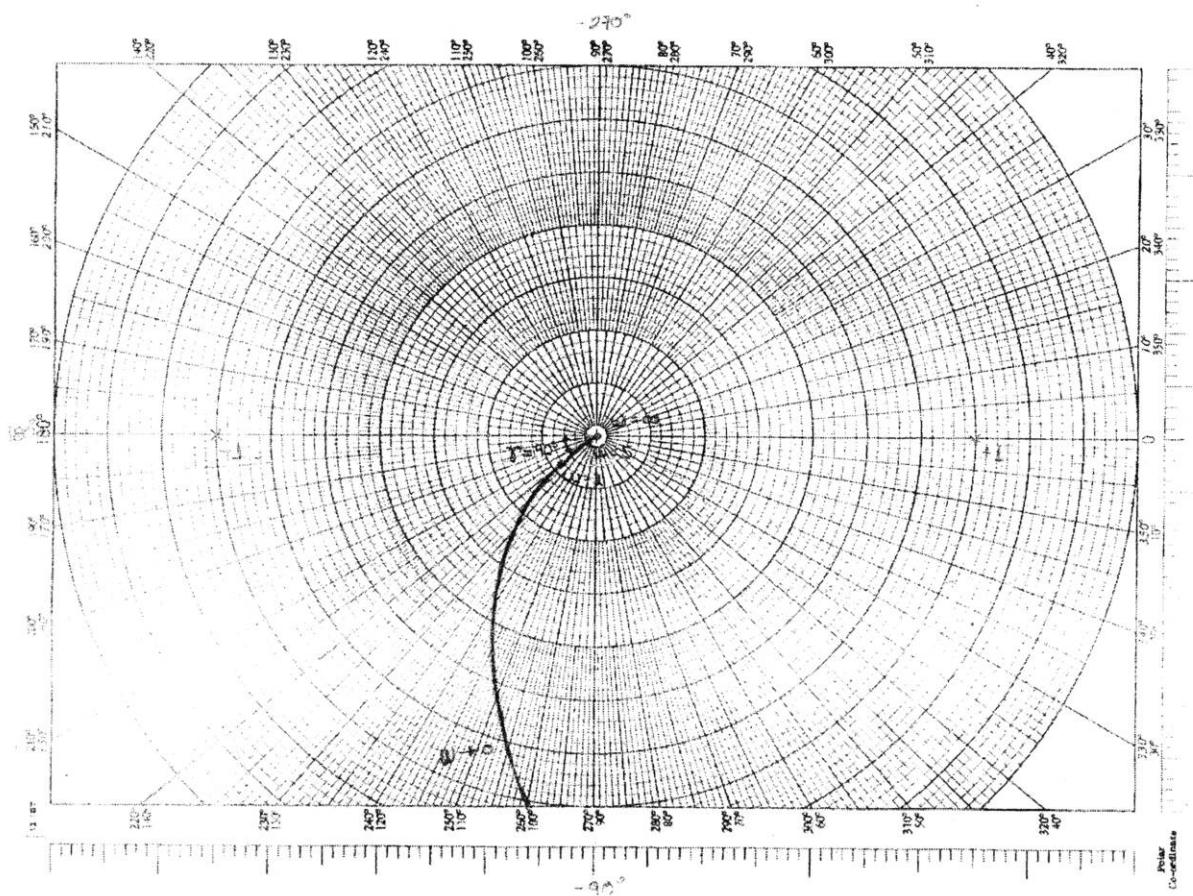


Diagrama de Nyquist para el sistema $G(s)=5(s+0.5)/[s^2+2s+1]$

Margen de Fase (γ) = 40°

Margen de Ganancia (K_g) = ∞

El sistema es estable

I.3 GRÁFICAS DE NICHOLS

20. Dibuje la gráfica de Nichols para el siguiente sistema.

$$G(s) = \frac{3}{(s+3)(s+4)}$$

Hacemos $s = j\omega$

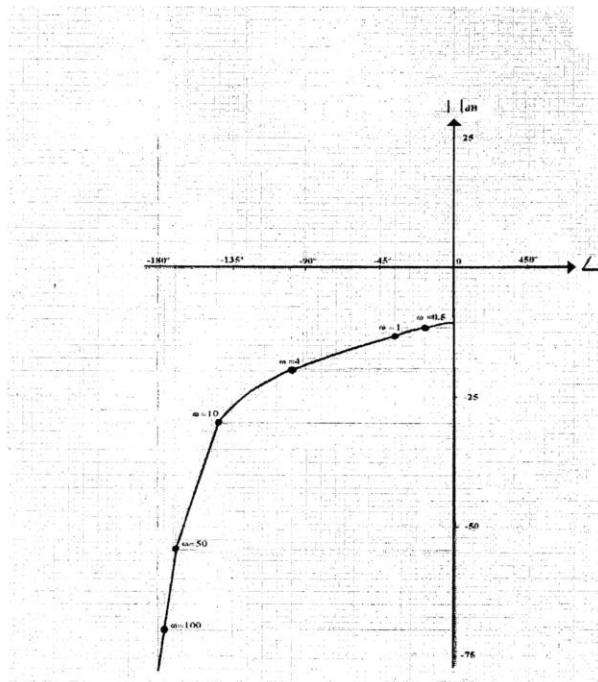
$$G(j\omega) = \frac{3}{(j\omega+3)(j\omega+4)}$$

La magnitud (en decibels) y su fase son:

$$|GH(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left(\frac{3}{\sqrt{(\omega^2+9)}\sqrt{(\omega^2+16)}} \right) \angle -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{3}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{4}\right)$$

Magnitud en dB y fase para diferentes valores de ω

ω	$ GH(j\omega) $ dB	Fase
0.5	-12.227	-16.587°
1	-12.762	-32.471°
4	-19.488	-98.130°
10	-31.476	-141.499°
50	-58.459	-171.992°
100	-70.468	-175.991°



Gráfica de Nichols para el sistema $G(s)=3/[(S+3)(S+4)]$ con $H(s)=1$

21. Dibuje la gráfica de Nichols para la siguiente función de lazo abierto y determine la estabilidad del sistema de retroalimentación.

$$G(s) = \frac{15}{s^2 + 8s + 15} \quad H(s) = \frac{1}{s}$$

La función de transferencia en lazo abierto es:

$$GH(s) = \frac{15}{s(s+3)(s+5)}$$

Haciendo $s = j\omega$

$$GH(s) = \frac{15}{(j\omega)(j\omega+3)(j\omega+5)}$$

En forma polar:

$$|GH(j\omega)| = \frac{15}{\omega \sqrt{(\omega^2 + 9)} \sqrt{(\omega^2 + 25)}} \angle -90^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{3}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{5}\right)$$

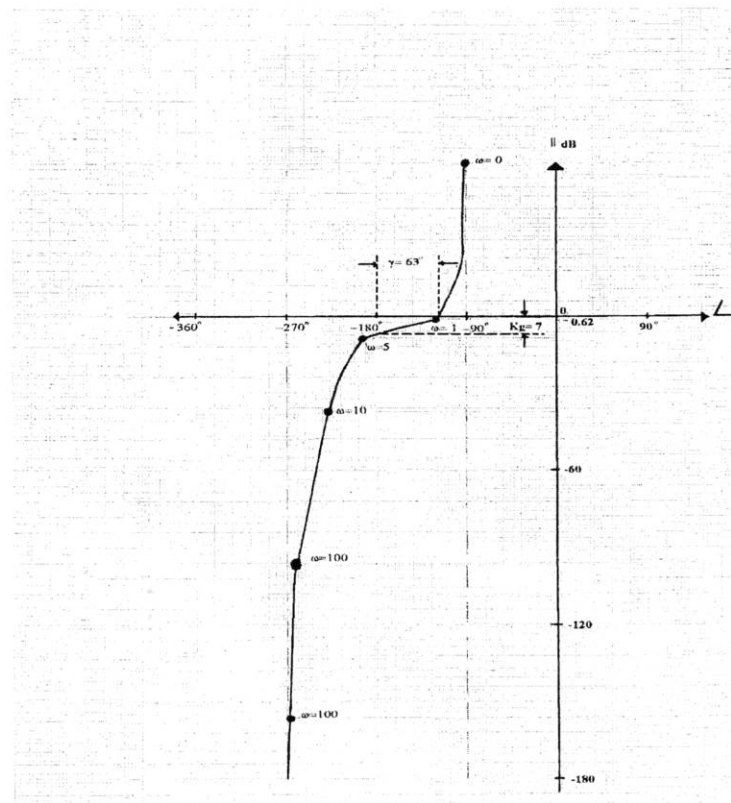
Obtenemos la magnitud en dB con la siguiente expresión:

$$20 \log |GH(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left(\frac{15}{\omega \sqrt{(\omega^2 + 9)} \sqrt{(\omega^2 + 25)}} \right)$$

Asignando valores a ω obtenemos la siguiente tabla:

Magnitud en dB y fase para el sistema $GH(s)=15/[s(s+3)(s+5)]$

ω	$20 \log GH(j\omega) $	Fase
0	∞	-90°
1	-0.6279	-119.744°
5	-8.26218	-194.0362°
10	-37.8215	-226.7357°
100	-96.4929	-265.4192°
1000	-156.478	-269.5416°



Diagramas de Nichols del sistema $GH(s)=15/[s(s+3)(s+5)]$

Margen de Ganancia (K_g) = 7 dB

Margen de Fase (γ) = 63°

El sistema es estable.

22. Dibuje la gráfica de Nichols para la siguiente función de lazo abierto y determine la estabilidad del sistema de retroalimentación.

$$G(s) = \frac{10}{s(1+s)(2+s)}$$

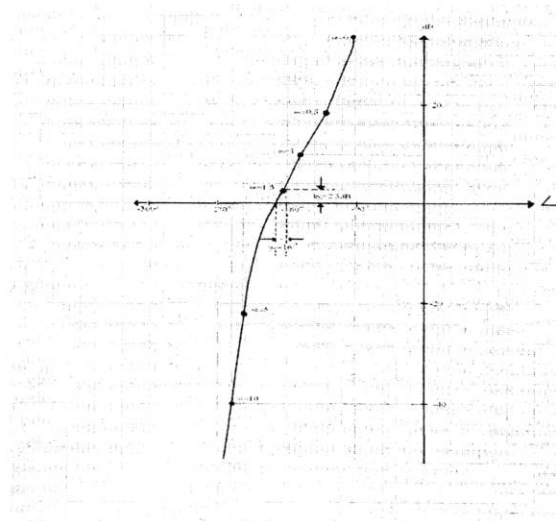
Sustituyendo s por $j\omega$

$$G(j\omega) = \frac{10}{j\omega(1+j\omega)(2+j\omega)}$$

La ganancia en dB es:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left(\frac{10}{\omega \sqrt{1+\omega^2} \sqrt{4+\omega^2}} \right) \angle -90^\circ - \tan^{-1}\omega - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Ganancia en dB y fase para diferentes valores de ω		
ω	$ GH(s) $ dB	Fase
0.5	18.767	-130.601°
1	10	-161.565°
1.5	3.40	-183.179°
5	-22.753	-236.888°
10	-40.21354713081	-252.979°



Gráfica de Nichols para el sistema $G(s) = 10/[s(s+1)(s+2)]$

Margen de Ganancia (K_g) = -2.5 dB

Margen de fase (γ) = -16°

El sistema es inestable.

23. Dibuje la gráfica de Nichols para la siguiente función de lazo abierto y determine la estabilidad del sistema de retroalimentación.

$$G(s) = \frac{20}{(s+2)(s+5)} \quad \text{con} \quad H(s) = \frac{2}{s}$$

La función de transferencia es:

$$GH(s) = \frac{40}{s(s+2)(s+5)}$$

La forma isócrona del sistema es:

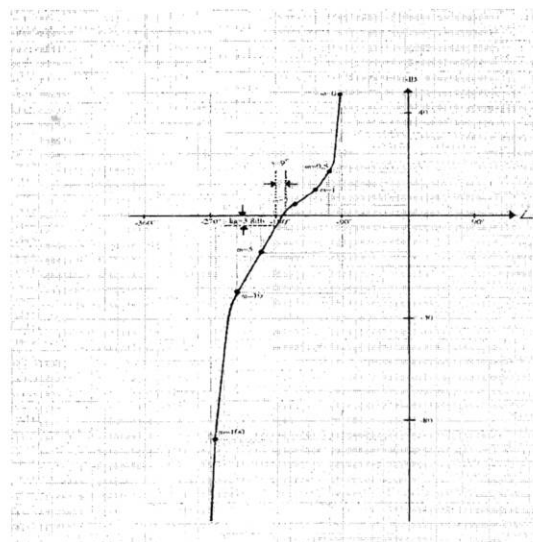
$$GH(j\omega) = \frac{40}{j\omega(j\omega+2)(j\omega+5)}$$

La magnitud (en decibeles) y su fase es:

$$|GH(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left(\frac{40}{\omega \sqrt{\omega^2 + 4} \sqrt{\omega^2 + 25}} \right) \angle -90^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{2} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{5} \right)$$

Ganancia de db y fase para diferentes valores de ω

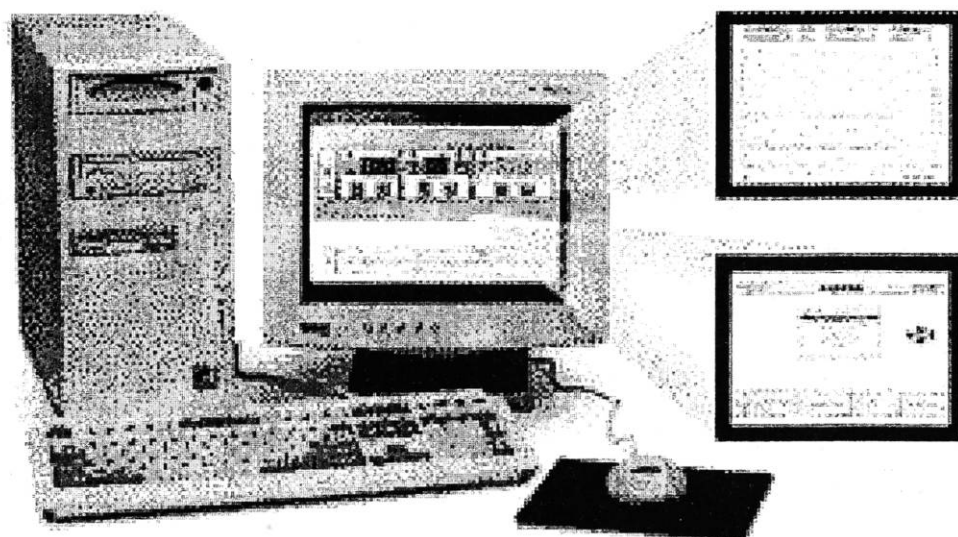
ω	$ GH(j\omega) _{dB}$	Fase
0.5	17.7855	-109.746
1	10.901	-127.874
2	2.365	-156.801
5	-13.551	-203.198
10	-29.098	-232.125
100	-87.971	-265.999



Margen de Ganancia (Kg) = 3.8 dB

Margen de Fase (γ) = 9° ; El sistema es estable

II. LUGAR DE LAS RAÍCES



II.1 REGLAS DE CONSTRUCCIÓN DEL LUGAR DE LAS RAÍCES

- 1.- El lugar de las raíces comienza en los polos de $GH(S)$ (Función de Transferencia a lazo abierto)
- 2.- El lugar de las raíces termina en los ceros de $GH(S)$
- 3.- Todo lugar de raíces va a tener N números de ramas $N = \# \text{ Polos finitos}$
- 4.- Todo lugar de las raíces es simétrico respecto al eje real
- 5.- Lugar de las raíces en el eje real: Un punto en el eje real es lugar de las raíces si el número de polos y ceros de $GH(S)$ a su derecha es impar
- 6.- Asíntotas del lugar de las raíces, para valores donde $S \rightarrow \infty$ el lugar de las raíces son asíntóticas a líneas rectas dadas por los ángulos

$$\theta = (2k+1)\pi / (p-z)$$

$$P-Z = \# \text{ asíntotas}$$

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots, < (p-z)$$

$P = \text{polos}$

$Z = \text{ceros}$

- 7.- Intersección de las asíntotas: Se lleva a cabo solo en eje real
 $\sigma = (\sum \text{polos} - \sum \text{ceros}) / (p-z)$ nota.- \sum sumatoria de los valores de p y z

- 8.- Puntos de separación $dk/ds = 0$

- 9.- Ángulos de partida y llegada (ángulos con que parte los polos y con qué ángulo llegan a los ceros). Se supone un punto tan cercano a los polos o los ceros que es el mismo polo o cero y se tiene que cumplir la condición de fase

$$\angle \sum \text{ceros} - \angle \sum \text{polos} = \pi \quad \text{para un punto } S_1$$

- 10.- Intersección del lugar de las raíces con el eje imaginario, para determinar el valor de w y k de cruce con el eje imaginario se emplea el criterio de estabilidad de Routh

- 11.- Movimiento de las ramas: las que están mas cerca del eje imaginario se mueven hacia la derecha y los polos más alejados se mueven hacia la izquierda.

1. Bosqueje el lugar de las raíces del sistema de retroalimentación del lazo abierto $GH(s)$, utilizando las reglas de construcción.

$$GH(s) = \frac{K}{s(s+1)^2}$$

$$GH(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+1)}$$

1.- POLOS:

$$P_1 = 0$$

$$P_{2,3} = -1$$

2.- CEROS:

$$Z_{1,2,3,\dots} = \infty$$

3.- # DE RAMAS = 3

4.- simetría \exists

5.- L de R sobre el eje real: de 0 a -1

6.- # de asíntotas = 3

ángulos de las asíntotas

$$\angle = \frac{(2K+1)\pi}{p-z} = \frac{(2K+1)\pi}{3}, \therefore K=0 \Rightarrow \angle = 60^\circ, K=1 \Rightarrow \angle = 180^\circ, K=2 \Rightarrow \angle = 300^\circ$$

$$7.- \sigma = \frac{(\sum p - \sum z)}{p-z} = \frac{-(1+1-0)}{3} = \frac{-2}{3} = -0.66$$

$GH(S) + 1 = 0$ Ecuación característica

$$s(s+1)(s+1) + K = 0$$

$$s^2 + s)(s+1) + K = 0$$

$$s^3 + s^2 + s^2 + s + K = 0$$

$$K = -s^3 - 2s^2 - s$$

8.- Intersección con el eje imaginario (otra forma diferente al teorema de Routh).

$$s^3 + 2s^2 + s + K = 0$$

$$j^3 \omega^3 + 2j^2 \omega^2 + j\omega + K = 0$$

$$j\omega(j^2 \omega^2) + 2j^2 \omega^2 + j\omega + K = 0$$

$$-j\omega^3 - 2\omega^2 + j\omega + K = 0$$

$$K - 2\omega^2 = 0 \text{ -----(1)}$$

$$(-\omega^3 + \omega) = 0 \text{ -----(2)}$$

De la ecuación (2):

Substituyendo en (1):

$$\omega^3 = \omega$$

$$\frac{\omega^3}{\omega} = 1$$

$$\omega^2 = 1$$

$$\omega = \pm \sqrt{1}$$

$$K - 2(\sqrt{1})^2 = 0$$

$$K - 2 = 0$$

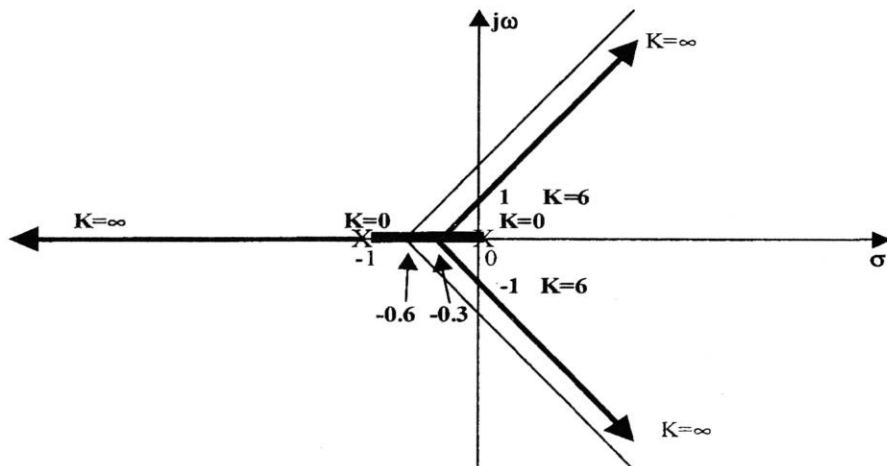
$$K = \underline{2}$$

Cruce con el eje imaginario

9.- Puntos de separación $\partial k / \partial s = 0$

$$\frac{\partial K}{\partial s} = -3s^2 - 4s - 1 = 0$$

$$s = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(3)(1)}}{2(3)} = \frac{-4 \pm 2}{6}, s_1 = -0.33, s_2 = \underline{-1}$$



2. Bosqueje el lugar de las raíces del sistema de retroalimentación del lazo abierto $GH(s)$, utilizando las reglas de construcción.

$$GH(s) = \frac{K}{(s^2 + s + 1)(s + 1)}$$

$$s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -0.5 \pm 0.86j \Rightarrow s_1 = -0.5 + 0.86j, s_2 = -0.5 - 0.86j$$

$$GH(s) = \frac{K}{(s + 0.5 - 0.86j)(s + 0.5 + 0.86j)(s + 1)}$$

1.- POLOS:

$$P_1 = -1$$

$$P_{2,3} = -0.5 \pm 0.86j$$

2.- CEROS:

$$Z_{1,2,3,\dots} = \infty$$

3.- # DE RAMAS = 3

4.- simetría \exists

5.- L de R sobre el eje real: de -1 a $-\infty$

6.- # de asíntotas = 3

ángulos de las asíntotas

$$\angle = \frac{(2K+1)\pi}{p-z}, \therefore K=0 \Rightarrow \angle = 60^\circ, K=1 \Rightarrow \angle = 180^\circ, K=2 \Rightarrow \angle = 300^\circ$$

$$7.- \sigma = \frac{(\sum p - \sum z)}{p-z} = \frac{-(0.5 - 0.86j + 0.5 + 0.86j + 1)}{3} = -0.66$$

$GH(s) + 1 = 0$ Ecuación característica

$$(s^2 + s + 1)(s + 1) + K = 0$$

$$s^3 + s^2 + s^2 + s + s + 1 + K = 0$$

$$s^3 + 2s^2 + 2s + 1 + K = 0$$

8.- Puntos de separación $\partial K / \partial s = 0$

$$\frac{\partial K}{\partial s} = 3s^2 + 4s + 2 = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(3)(2)}}{2(3)} = \frac{-4 \pm 2.82j}{6} \Rightarrow s_1 = -0.66 + 0.47j, s_2 = -0.66 - 0.47j$$

9.- $\sum Z - \sum P = \Pi$ (ángulos de partida)

$$-(\tan^{-1}\infty + \tan^{-1} \frac{0.86}{0.5} + \theta_x) = 180^\circ$$

$$-(90^\circ + 59.8^\circ + \theta_x) = 180^\circ$$

$$\theta_x = 180^\circ - 90^\circ - 59.8^\circ$$

$$\theta_x = 30.2^\circ$$

10.- Intersección con el eje imaginario (otro método diferente al de Routh)

$$s^3 + 2s^2 + 2s + 1 + K = 0$$

$$j^3\omega^3 + 2j^2\omega^2 + 2j\omega + 1 + K = 0$$

$$-j\omega(\omega^2) - 2\omega^2 + 2j\omega + 1 + K = 0$$

$$-j\omega^3 - 2\omega^2 + 2j\omega + 1 + K = 0$$

$$2\omega - \omega^3 = 0 \text{ -----(1)}$$

$$1 + K - 2\omega^2 = 0 \text{ -----(2)}$$

De la ecuación (1):

$$2\omega = \omega^3$$

$$\omega^2 = 2$$

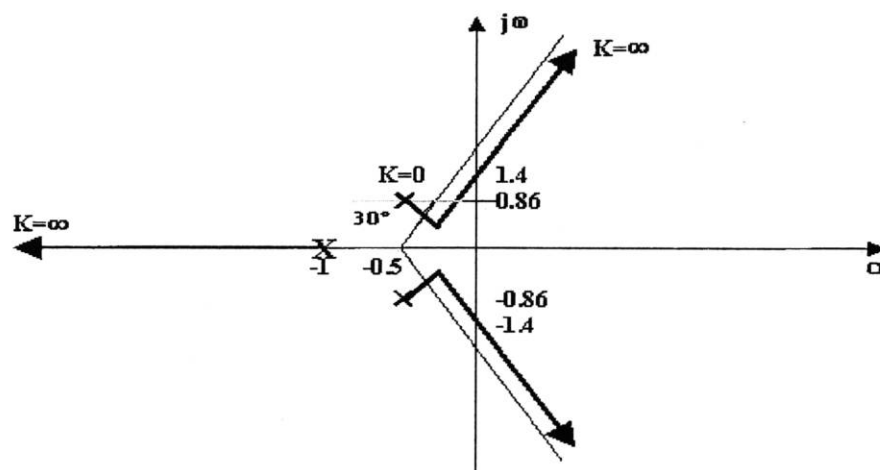
$$\omega = \pm \sqrt{2}$$

Substituyendo en (2):

$$K = 2\omega^2 - 1$$

$$K = 2(\sqrt{2})^2 - 1$$

$$K = 2(2) - 1 = 3$$



3. Bosqueje el lugar de las raíces del sistema de retroalimentación del lazo abierto GH(s), utilizando las reglas de construcción.

$$GH(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$

1.- POLOS:

$$P_1 = 0$$

$$P_2 = -2$$

$$P_3 = -3$$

2.- CEROS:

$$Z_1 = -1$$

$$Z_{2,3,\dots} = \infty$$

3.- # DE RAMAS = 3

4.- simetría \exists

5.- L de R sobre el eje real: de 0 a -1 y de -2 a -3

6.- # de asíntotas = 2

ángulos de las asíntotas

$$\angle = \frac{(2K+1)\pi}{p-z}, \therefore K=0 \Rightarrow \angle = 90^\circ, K=1 \Rightarrow \angle = 270^\circ$$

$$7.- \sigma = \frac{(\sum p - \sum z)}{p-z} = \frac{-(2+3-1)}{2} = -2$$

$$GH(s) + 1 = 0$$

$$s(s+2)(s+3) + K(s+1) = 0$$

$$(s^2 + 2s)(s+3) + K(s+1) = 0$$

$$s^3 + 3s^2 + 2s^2 + 6s + K(s+1) = 0$$

$$s^3 + 5s^2 + 6s + K(s+1) = 0$$

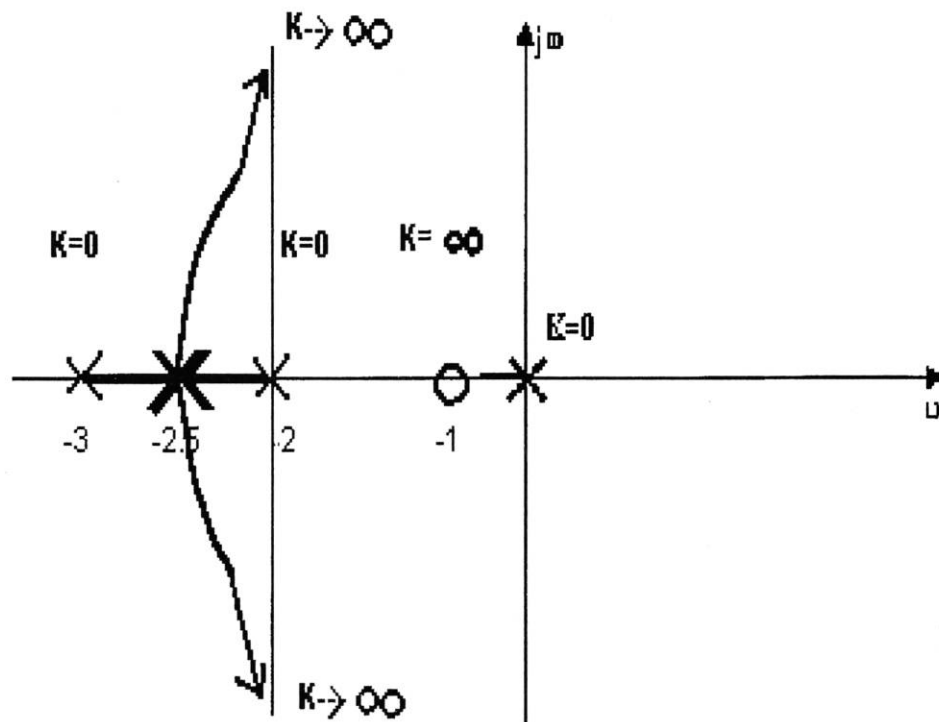
$$K = \frac{-s^3 - 5s^2 - 6s}{s+1}$$

8.- Puntos de separación $\partial k / \partial s = 0$

$$\frac{\partial K}{\partial s} = \frac{-3s^2 - 10s - 6}{s+1} = 0$$

$$3s^2 + 10s + 6 = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4(3)(6)}}{2(3)} = \frac{-10 \pm \sqrt{28}}{6} \Rightarrow s_1 = -0.8, s_2 = -2.54$$



4. Bosqueje el lugar de las raíces del sistema de retroalimentación $GH(s)$, utilizando las reglas de construcción.

$$GH(s) = \frac{K}{(s+1)(s+3)(s^2+2s+5)}$$

$$GH(s) = \frac{K}{(s+1)(s+3)(s-1+2j)(s-1-2j)}$$

$$s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2}, \Rightarrow s_1 = -1+2j, s_2 = -1-2j$$

1.- POLOS :

$$P_1 = -1$$

$$P_2 = -3$$

$$P_{3,4} = -1 \pm 2j$$

2.- CEROS:

$$Z_{1,2,3,\dots} = \infty$$

3.- # DE RAMAS = 4

4.- simetría \exists

5.- L de R sobre el eje real: de -1 a -3

6.- # de asíntotas = 4

ángulos de las asíntotas

$$\angle = \frac{(2K+1)\pi}{4}, \therefore K=0 \Rightarrow \angle = 45^\circ, K=1 \Rightarrow \angle = 135^\circ, K=2 \Rightarrow \angle = -135^\circ, K=3 \Rightarrow \angle = -45^\circ$$

$$7.- \sigma = \frac{-1-3-1+2j-1-2j}{4} = -\frac{6}{4} = -1.5$$

$$9.- \sum Z - \sum P = \Pi$$

Angulo de llegada: $s_1 = -1+2j$

$$-\left[\tan^{-1} \infty + \tan^{-1} \left(\frac{2}{2} \right) + 90^\circ + \theta_x \right] = \pi$$

$$-90^\circ - 135^\circ - 90^\circ - \theta_x = 180^\circ$$

$$\theta_x = -180^\circ - 135^\circ - 180^\circ = -135^\circ$$

$$GH(S) + 1 = 0$$

$$(s^2 + 3s + 3)(s^2 + 2s + 5) + K = 0$$

$$s^4 + 2s^3 + 5s^2 + 4s^3 + 8s^2 + 20s + 3s^2 + 6s + 1 + K = 0$$

$$s^4 + 6s^3 + 1s^2 + 2s + 1 + K = 0$$

8.- Puntos de separación $\partial k / \partial s = 0$

$$K = -(S^4 + 6S^3 + 16S^2 + 26S + 15)$$

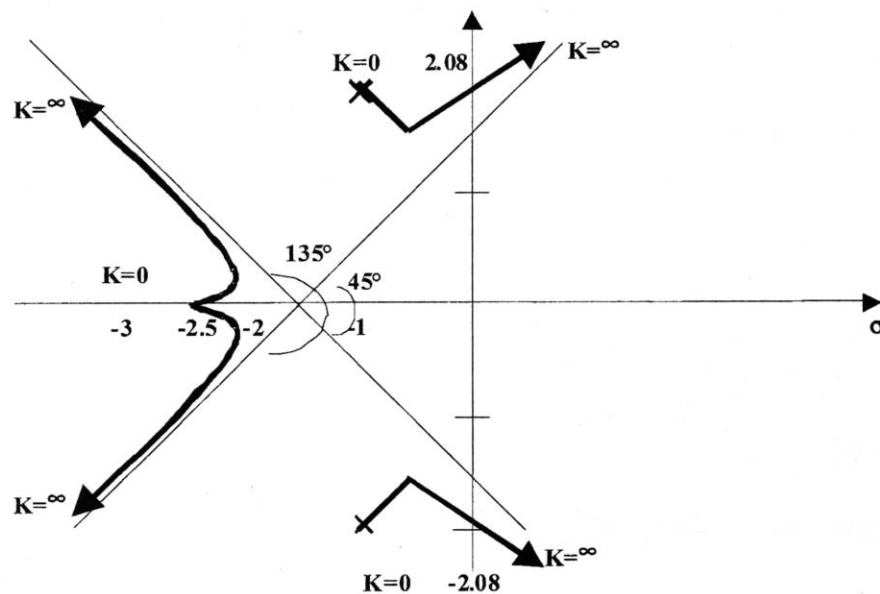
Derivando encontramos el punto de separación -2.5

10.- Intersección con el eje imaginario
Criterio De Routh

$$640 - 18K = 0 \Rightarrow K = \frac{640}{18} = 35.55$$

$$\frac{35}{3}s^2 + 15 + K = 0 \Rightarrow s^2 = -\frac{45 + 3K}{35} = -4.33$$

$$\therefore \omega = \pm \sqrt{-4.33} = \pm 2.08j$$



5. Bosqueje el lugar de las raíces del sistema de lazo cerrado $GH(s)$, utilizando las reglas de construcción.

$$GH(S) = \frac{K}{(S+3)(s+8)(S^2+5S+25)}$$

1.- POLOS:

$$P_1 = -3$$

$$P_2 = -8$$

$$P_{3,4} = -2.5 \pm 4.33j$$

2.- CEROS:

$$Z_{1,2,3,\dots} = \infty$$

3.- # DE RAMAS = 4

4.- simetría \exists

5.- L de R sobre el eje real: de -8 a -3

6.- # de asíntotas = 4

ángulos de las asíntotas

$$\theta = \frac{(2K+1)\Pi}{P-Z}$$

$$\theta_1 = 180/4 = 45^\circ$$

$$\theta_2 = 540/4 = 135^\circ$$

$$\theta_3 = 900/4 = 225^\circ$$

$$\theta_4 = 1260/4 = 315^\circ$$

$$7.- \sigma = [(-3 - 8 - 2.5 + 4.3j) - 2.5 - 4.3j] - 0 \div 4$$

$$\sigma = -16/4 = -4$$

$$9.- \sum Z - \sum P = \Pi \quad (\text{ángulos de partida})$$

$$-(\operatorname{tg}^{-1} \frac{4.3}{0.5} + \operatorname{tg}^{-1} \frac{4.3}{5.5} + \operatorname{tg}^{-1} \frac{4.33}{0} + \theta x) = 180$$

$$- (83.36 + 38.21 + 90 + \theta x) = 180$$

$$- 211.57 - \theta x = 180$$

$$\theta x = -31.57$$

$$GH(S) + 1 = 0$$

$$(s+3)(s+8)(s^2+5s+25) + k = 0$$

$$s^4 + 16s^3 + 104s^2 + 395s + 600 + k = 0$$

10.- Interseccion con el eje imaginario

Criterio De Routh

S^4	1	104	$600+K$
S^3	16	395	0
S^2	79.31	$600+K$	0
	0	$\frac{(79.31)(395) - (600+k)(16)}{79.31}$	0
S^0	$600+K$	0	0

Para que el sistema sea estable:

$$\frac{(79.31)(395) - (600+k)(16)}{79.31} > 0$$

$$31327.45 - 9600 - 16k > 0$$

$$21727.45 > 16k$$

$$k < 1358$$

$$\therefore 0 < k < 1358$$

La ecuación auxiliar es la de segundo orden;
(sustituyendo la k)

$$79.31s^2 + 600 + 1358 = 0$$

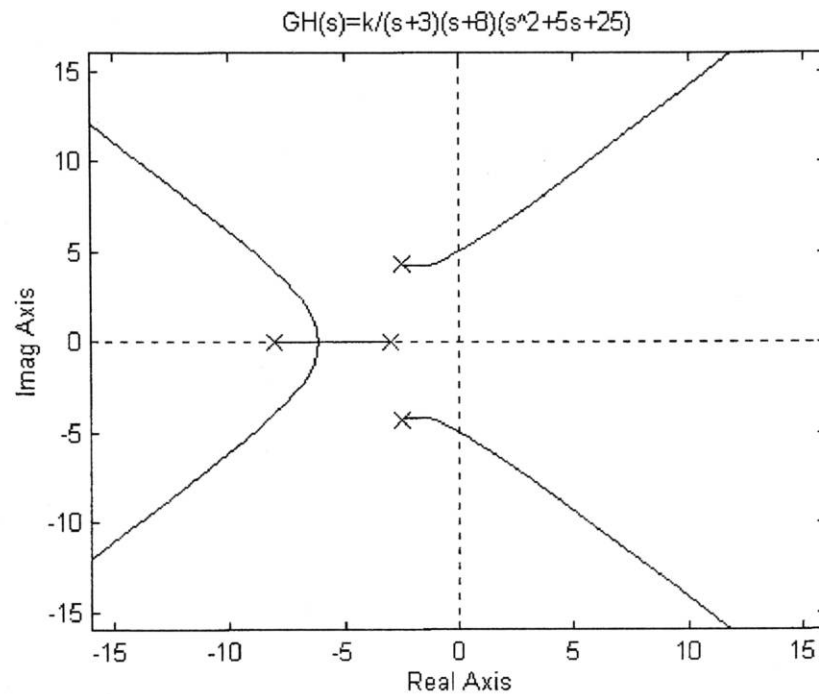
$$S_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1958}{79.31}} = \pm j 4.96$$

8.- Puntos de separación $\partial k / \partial s = 0$

$$\frac{\partial}{\partial s} (s^4 + 16s^3 + 104s^2 + 395s) = 0$$

$$4s^3 + 48s^2 + 208s + 395 = 0$$

$$S = -6.38$$



6. Bosqueje el lugar de las raíces del sistema de lazo cerrado.

$$GH(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+5)(s+6)}$$

Angulo de las asíntotas

$$\frac{(2K+1)\pi}{4}$$

K	Angulo
0	$\pi/4$
1	$3\pi/4$
2	$5\pi/4$
3	$7\pi/4$

$$\sigma = \frac{(-1-2-5-6)}{4} = -\frac{14}{4} = -3.5$$

intersección con el eje imaginario

$$(s+1)(s+2)(s+5)(s+6) + K = 0$$

$$s^4 + 14s^3 + 65s^2 + 112s + 60 + K = 0$$

s^4	1	65	60+K
s^3	14	112	0
s^2	57	60+K	0
s	5544+14K	0	
s^0	60+K		

$$\text{Donde } 60+K > 0 \Rightarrow K > -60 \Rightarrow K > 0$$

$$5544 - 14K > 0 \text{ por lo tanto } K < 5544/14 = 396 \Rightarrow K < 396 \text{ así } 396 > K > 0$$

$$As^2 + B = 0 \text{ por lo que } 57s^2 + (60+K) = 0$$

$$s = \pm j \sqrt{\frac{60+K}{57}} \text{ en } K = 396 \therefore s_{1,2} = \pm j \sqrt{8} = 2.828$$

Punto de arranque los puntos reales

$$(-K = s^4 + 14s^3 + 65s^2 + 112s + 60)(-1/2)$$

$$\frac{dK}{ds} = -2s^3 - 21s^2 - 65s - 56$$

Por medio de tanteo se obtiene que

S	dK/ds
-1.35	-3.21
-1.44	0.53
-1.435	-0.117
-1.438	-0.015
-1.4385	0.001

Por lo tanto si $(s+1.4384)$ en $2s^3 + 21s^2 + 65s + 56 = 0$

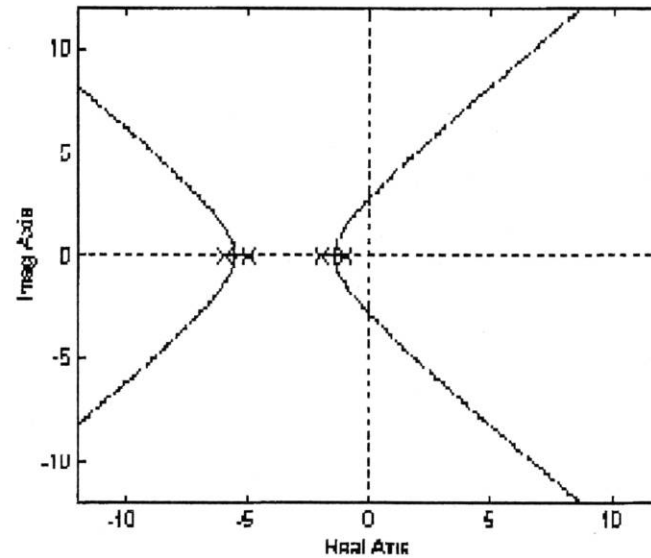
Obtenemos que

$$s + 1.4383 \overline{) 2s^3 + 21s^2 + 65s + 56}$$

se obtiene como resultado $2s^2+18.1232s+38.932$

$$s_{1,2} = \frac{-18.12 \pm \sqrt{(18.12)^2 - 4(2)(38.94)}}{2(2)} = \therefore s_{1,2} = -4.53 \pm 1.02$$

En $s_2 = -5.5$ tenemos el otro punto de arranque



7. Bosqueje el lugar de las raíces del sistema de lazo cerrado $GH(s)$, utilizando las reglas de construcción.

$$GH(s) = \frac{k}{s(s^2 + 6s + 25)}$$

- 1.- El lugar de las raíces comienza en los polos: $P_1 = 0$, $P_2 = -3+j4$, $P_3 = -3-j4$
- 2.- El lugar de las raíces termina en los ceros, para este ejemplo $Z_{1,2,3} = \infty$.
- 3.- Por lo tanto el número de ramas será de tres.
- 4.- Las asíntotas se obtienen por medio de:

$$A = \frac{(2k+1)\pi}{P-Z}$$

$$A_0=60^\circ, A_1=180^\circ, A_2= -60^\circ$$

5.- La intersección de las asíntotas con el eje real esta dado por:

$$\sigma = \frac{\sum \text{Polos} - \sum \text{Ceros}}{P - Z} \quad \sigma = -2$$

6.- El punto de separación está dado por:

$$\frac{dk}{ds} = -(3s^2 + 12s + 25) = 0$$

resolviendo para S. $S_{1,2} = -2 \pm j2.0817$

Por ser un número complejo no satisface las condiciones de ángulo, por lo tanto no es punto ni de ruptura ni de partida ni de llegada.

7.- El ángulo de partida desde el polo complejo en el semiplano superior del plano S es:

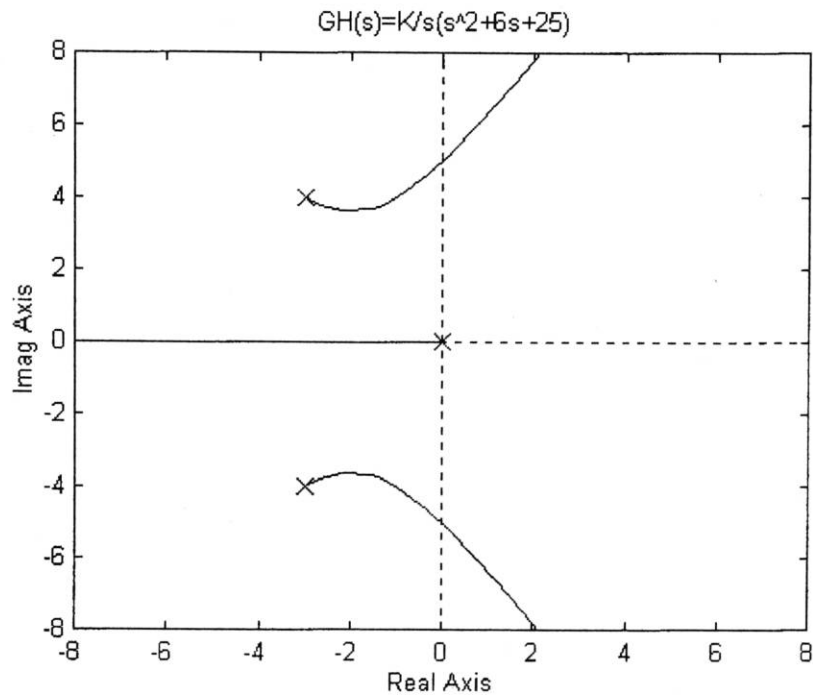
$$\theta = 180^\circ - 126.87^\circ - 90^\circ \quad \theta = -36.87^\circ$$

8.- La intersección del lugar de las raíces en el eje imaginario se puede obtener sustituyendo $s = j\omega$ en la ecuación característica y despejando k y ω .

$$s^3 + 6s^2 + 25s + k = 0$$

$$(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 25(j\omega) + k = (-6\omega^2 + k) + j\omega(25 - \omega^2) = 0$$

$$\therefore \quad \omega = \pm j5, \quad k = 150, \quad \text{o} \quad \omega = 0, \quad k = 0$$



8. Bosqueje el lugar de las raíces del sistema de lazo cerrado $GH(s)$, utilizando las reglas de construcción.

$$GH(s) = \frac{k(s+2)}{s(s+6)(s^2+4s+16)}$$

- 1.- El lugar de las raíces comienza en los polos: $P_1 = 0$, $P_2 = -6$, $P_{3,4} = -2 \pm j3.46$
- 2.- Puntos de llegada, para este ejemplo: $Z_1 = -2$, $Z_{2,3,4} = \infty$.
- 3.- Por lo tanto el número de ramas será de 3.
- 4.- Las asíntotas se obtienen por medio de:

$$A = \frac{(2k+1)\pi}{P-Z}$$

$$A_0 = 60^\circ, A_1 = 180^\circ, A_2 = -60^\circ$$

5.- La intersección de las asíntotas con el eje real está dado por:

$$\sigma = \frac{\sum \text{Polos} - \sum \text{Ceros}}{P - Z}$$

$$\sigma = -2.67$$

6.- El punto de separación está dado por:

$$\frac{dk}{ds} = -\left(\frac{s(s+6)(s^2+4s+16)}{s+2}\right)$$

resolviendo para S, tenemos el mismo caso que el ejemplo anterior, la solución de S no satisface la condición de ángulo.

7.- El ángulo de partida es:

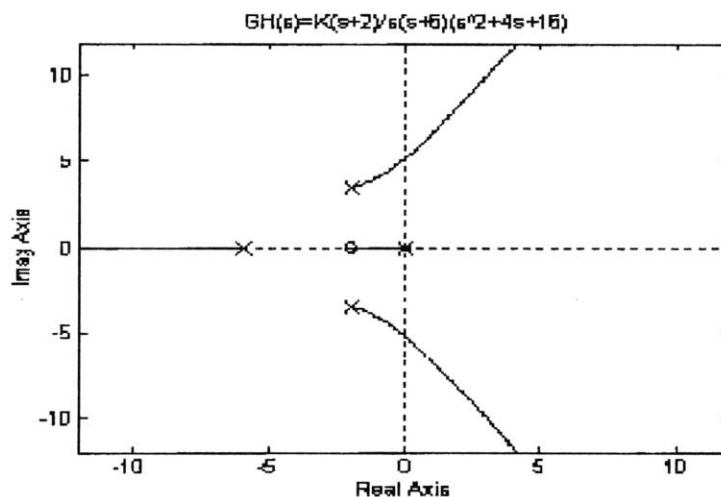
$$\theta = 180^\circ + 90^\circ - 250.85^\circ \quad \theta = 19.15^\circ$$

8.- La intersección del lugar de las raíces en el eje imaginario se obtiene resolviendo para s la ecuación característica.

$$s^4 + 10s^3 + 40s^2 + (96 + k)s + 2k = 0$$

Por el criterio de Routh se obtiene:

$$S_{1,2} = \pm j3.68$$



9. Bosqueje el lugar de las raíces del sistema de lazo cerrado $GH(s)$, utilizando las reglas de construcción.

$$GH(s) = \frac{k(s+3)}{s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)}$$

1.- El lugar de las raíces comienza en los polos: $P_1 = 0$, $P_2 = -5$, $P_3 = -6$, $P_{4,5} = -1 \pm j$

2.- Los ceros, para este ejemplo son: $Z_1 = -3$ $Z_{2,3,4,5} = \infty$.

3.- Por lo tanto el número de ramas será de 5.

4.- Las asíntotas se obtienen por medio de:

$$A = \frac{(2k+1)\pi}{P-Z}$$

$$A_0 = 45^\circ, A_1 = 135^\circ, A_2 = -225^\circ, A_3 = -315^\circ$$

5.- La intersección de las asíntotas con el eje real está dado por:

$$\sigma = \frac{\sum \text{Polos} - \sum \text{Ceros}}{P-Z} \quad \sigma = -2.5$$

6.- El punto de separación está dado por:

$$\frac{dk}{ds} = -(3s^2 + 12s + 25) = 0$$

resolviendo para S. $S_{1,2} = -2 \pm j2.0817$

Por ser un número complejo no satisface las condiciones de ángulo, por lo tanto no es punto ni de ruptura, ni de partida, ni de llegada.

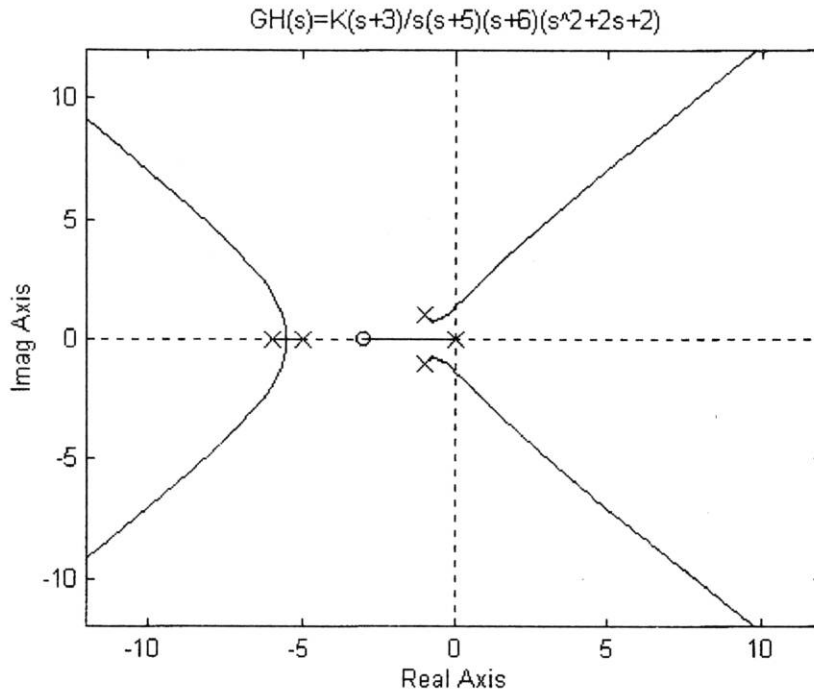
7.- El ángulo de partida es:

$$\theta = 180^\circ + 26.56^\circ - 135^\circ - 90^\circ - 14.03^\circ - 11.3^\circ \quad \theta = -43.77^\circ$$

8.- La intersección del lugar de las raíces en el eje imaginario se obtiene resolviendo la ecuación característica, y resolviendo para s.

$$S_{1,2} = \pm j1.35, \quad k = 35.56$$

$$s^5 + 13s^4 + 54s^3 + 82s^2 + (60 + k)s + 3k = 0$$



10. Bosqueje el lugar de las raíces del sistema de lazo cerrado $GH(s)$, utilizando las reglas de construcción.

$$GH(s) = \frac{k(s+2)(s+3)}{s(s+1)}$$

- 1.- El lugar de las raíces comienza en los polos: $P_1 = 0$, $P_2 = -1$
- 2.- El lugar de las raíces termina en los ceros: $Z_1 = -2$, $Z_2 = -3$
- 3.- Por lo tanto el número de ramas será de 2.
- 4.- Las asíntotas se obtienen por medio de:

$$A = \frac{(2k+1)\pi}{P-Z}$$

Para este caso como el número de ceros es igual al número de polos no hay asíntotas.

- 5.- La intersección de las asíntotas con el eje real, tampoco existe.

6.- Los puntos de ruptura de salida y de llegada están dados por:

$$\frac{dk}{ds} = - \left(\frac{s(s+1)}{(s+2)(s+3)} \right)$$

resolviendo para S. $S_1 = -0.634$ $S_2 = -2.366$

como ambos puntos están sobre el lugar de las raíces, son los puntos de ruptura y de llegada. Por lo tanto existen dos valores para K.

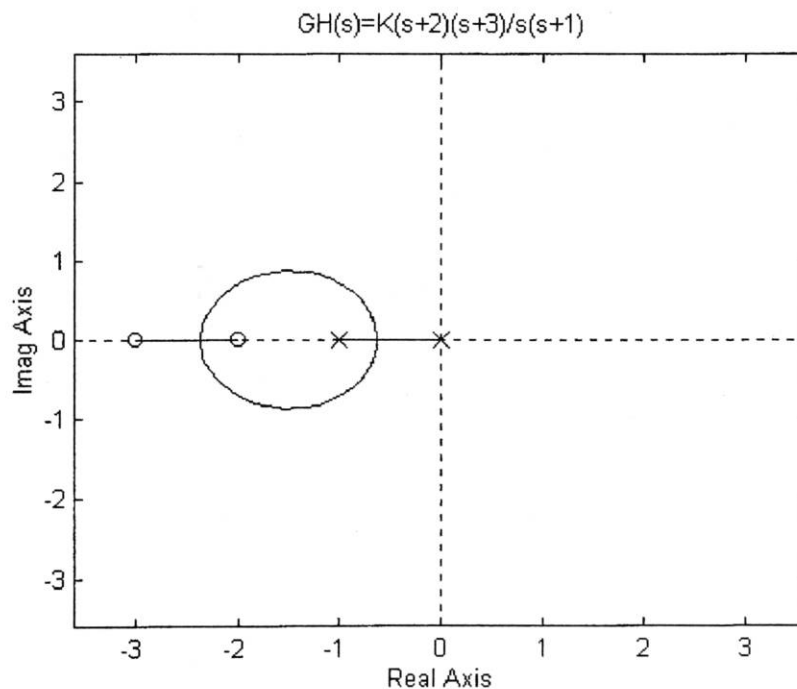
En el punto $S = -0.634$ ($K = 0.0718$) En el punto $S = -2.366$ ($K = 14$)

7.- Para calcular el ángulo de partida (llegada) es necesario tomar una infinidad de puntos. Se puede encontrar que el lugar de las raíces es un círculo con centro en -1.5 que pasa por los puntos de partida y de llegada.

$$s^3 + 6s^2 + 25s + k = 0$$

$$(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 25(j\omega) + k = (-6\omega^2 + k) + j\omega(25 - \omega^2) = 0$$

8.- Como el lugar de las raíces es un círculo del semiplano izquierdo, no tiene intersección con el eje imaginario, por lo tanto son válidos todos los valores de K positivos.



11. Bosqueje el lugar de las raíces del sistema de lazo cerrado $GH(s)$, utilizando las reglas de construcción.

$$GH(s) = \frac{K(s+2)}{(s+1)(s^2+6s+10)}$$

- Encontrar K para $\zeta = 0.7$.
- Encontrar los otros polos si los hay ($\zeta = 0.7$).
- Respuesta temporal a escalón unitario.

a)

$$s^2 + 6s + 10 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} = \frac{-6 \pm j2}{2} \Rightarrow s_1 = -3 + j, s_2 = -3 - j$$

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{(s+1)(s+3-j)(s+3+j)}$$

1.- POLOS:

$$P_1 = -1$$

$$P_{2,3} = -3 \pm j$$

2.- CEROS:

$$Z_1 = -2$$

$$Z_{2,3,\dots} = \infty$$

3.- # DE RAMAS = 3

4.- simetría \exists

5.- L de R sobre el eje real: de -1 a -2

6.- # de asíntotas = 2

ángulos de las asíntotas

$$\angle = \frac{(2K+1)\pi}{2}, \therefore K=0 \Rightarrow \angle = 90^\circ, K=1 \Rightarrow \angle = 270^\circ$$

$$7.- \sigma = \frac{-1-3+j-3-j+2}{3-1} = -\frac{5}{2} = -2.5$$

9.- $\sum Z - \sum P = \Pi$ (ángulos de partida)

$$GH(-3+j) = \frac{K(-3+j+2)}{(-3+j+1)(s+3-j)(-3+j+3+j)} = \frac{K(-1+j)}{(-2+j)(s+3+j)(2j)}$$

$$\theta_x(-3+j) = 18^\circ - \left[\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2}{0}\right) - \tan^{-1}(-1) \right] = -18^\circ - 15^\circ - 90^\circ + 135^\circ = -28^\circ \Rightarrow \theta_x = 72^\circ$$

$$GH(S) + 1 = 0$$

$$(s+1)(s^2+6s+10) + K(s+2) = 0$$

$$s^3 + 6s^2 + 10s + s^2 + 6s + 10 + K + 2K = 0$$

$$s^3 + 7s^2 + (16+K)s + (10+2K) = 0$$

10.- Intersección con el eje imaginario

Criterio De Routh

$$\frac{102+5K}{7} > 0$$

$$102+5K > 0 \Rightarrow K > -20.4$$

$$7s^2 + 10 + 2K = 0$$

$$7s^2 + 10 + 2(-20.4) = 0$$

$$7s^2 - 30.8 = 0 \Rightarrow s = \pm \sqrt{\frac{30.8}{7}} = \pm 2.097$$

Por lo tanto no hay cruces con el eje imaginario.

8.- Puntos de separación $\partial K / \partial s = 0$

$$s^3 + 7s^2 + 16s + 10 + K(s+2) = 0 \therefore K = \frac{-s^3 - 7s^2 - 16s - 10}{s+2}$$

$$K = -s^2 - 5s - 6 + 2(s+2)^{-1}$$

$$\frac{\partial K}{\partial s} = -2s - 5 - 2(s+2)^{-2} = -2s - 5 - \frac{2}{(s+2)^2} = \frac{-2s(s+2)^2 - 5(s+2)^2 - 2}{(s+2)^2}$$

$$\frac{\partial K}{\partial s} = \frac{-2s(s^2+4s+4) - 5(s^2+4s+4) - 2}{(s+2)^2} = \frac{-2s^3 - 8s^2 - 8s - 5s^2 - 20s - 20 - 2}{(s+2)^2}$$

$$2s^3 + 13s^2 + 28s + 22 = 0$$

$$s_1 = -1.65 + 0.84j$$

$$s_2 = -1.65 - 0.84j$$

$$s_3 = -3.19$$

Como los polos siguen a las asíntotas, las raíces de ésta ecuación quedan fuera del lugar de las raíces

Cuando $\zeta = 0.7$:

$$\zeta = 0.7 \Rightarrow \theta = \cos^{-1}(0.7) = 45^\circ$$

$$s_x = -2.7 + j2.55$$

$$GH(s_x) = \frac{K(-2.7 + j2.55 + 2)}{(-2.7 + j2.55 + 1)([-2.7 + j2.55]^2 + 6(-2.7 + j2.55 + 10))}$$

$$= \frac{K(-0.7 + j2.55)}{(-1.7 + j2.55)(7.29 - 13.77j - 6.5 - 16.2 + 15.3j + 10)}$$

$$= \frac{K\sqrt{0.49 + 6.5}}{\sqrt{2.89 + 6.5}(-5.41 + 1.53j)} = \frac{K\sqrt{0.49 + 6.5}}{\sqrt{2.89 + 6.5}\sqrt{29.26 + 2.34}} = 1$$

$$K = \frac{(3.0643106)(5.62)}{(2.64)} = \underline{6.5}$$

$$s^3 + 7s^2 + (16 + K)s + (10 + 2K) = (s + 2.7 - 2.55j)(s + 2.7 + 2.55j)(s + a)$$

$$\frac{s^3 + 7s^2 + (16 + 6.5)s + (10 + 2(6.5))}{(s + 2.7 - 2.55j)(s + 2.7 + 2.55j)} = (s + a)$$

$$\frac{s^3 + 7s^2 + 23s + 23}{s^2 + 5.4s + 13.79} = (s + a), \frac{s^3 + 7s^2 + 23s + 23}{s^2 + 5.4s + 13.79} \approx s + 1.6 \therefore s + 1.6 \equiv s + a \Rightarrow a = \underline{-1.6}$$

b) Por lo tanto los 3 polos para $\zeta = 0.7$ son:

$$s_{1,2} = \underline{-2.7 \pm 2.55j}$$

$$s_3 = \underline{-1.6} \text{ (sobre el eje real)}$$

c) Respuesta temporal a escalón unitario:

$$GH(s) = \frac{6.5(s + 2)}{(s + 1)(s^2 + 6s + 10)}, \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G}{1 + GH}, H(s) = 1$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{6.5(s + 2)}{(s + 1)(s^2 + 6s + 10) + 6.5(s + 2)} = \frac{6.5(s + 2)}{s^3 + 7s^2 + 22.5s + 23} = \frac{6.5(s + 2)}{(s + 2.6 - 2.5j)(s + 2.6 + 2.5j)(s + 1.7)}$$

$$= \frac{A}{(s + 2.6 - 2.5j)} + \frac{B}{(s + 2.6 + 2.5j)} + \frac{C}{(s + 1.7)}$$

$$A = \left. \frac{6.5(s + 2)}{(s + 2.6 + 2.5j)(s + 1.7)} \right|_{s = -2.6 + 2.5j} = \frac{6.5(-2.6 + 2.5j + 2)}{(-2.6 + 2.5j + 2.6 + 2.5j)(-2.6 + 2.5j + 1.7)} = \frac{-3.9 + 16.25j}{-4.5j + 12.5}$$

$$= \frac{-3.9 + 16.25j - 12.5 - 4.5j}{4.5j - 12.5 - 12.5 - 4.5j} = \frac{121.75 - 185.57j}{176.5} = \underline{0.68 - 1.05j}$$

$$B = \left. \frac{6.5(s + 2)}{(s + 2.6 - 2.5j)(s + 1.7)} \right|_{s = -2.6 - 2.5j} = \frac{6.5(-2.6 - 2.5j + 2)}{(-2.6 - 2.5j + 2.6 - 2.5j)(-2.6 - 2.5j + 1.7)} = \frac{-3.9 - 16.25j}{4.5j - 12.5}$$

$$= \frac{-3.9 - 16.25j - 12.5 - 4.5j}{4.5j - 12.5 - 12.5 - 4.5j} = \frac{-24.5 + 220.67j}{136} = \underline{-0.17 + 1.62j}$$

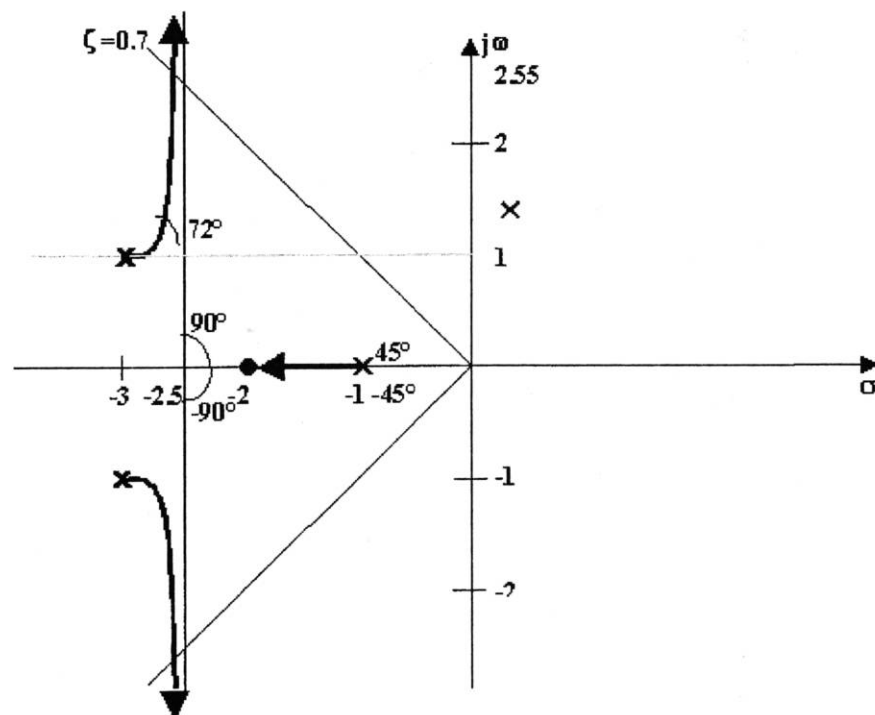
Aplicando la trasformada inversa de Laplace:

$$c(t) = (0.68 - 1.05j)e^{-(2.6-2.5j)t} + (-0.17 + 1.62j)e^{-(2.6+2.5j)t} + 0.27e^{-1.7t}$$

$$C = \frac{6.5(s+2)}{(s+2.6-2.5j)(s+2.6+2.5j)} \Big|_{s=-1.7} = \frac{6.5(-1.7+2)}{(-1.7+2.6-2.5j)(-1.7+2.6+2.5j)}$$

$$= \frac{1.95}{(0.9-2.5j)(0.9+2.5j)} = \frac{1.95}{7.06} = 0.27$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{0.68-1.05j}{(s+2.6-2.5j)} + \frac{-0.17+1.62j}{(s+2.6+2.5j)} + \frac{0.27}{(s+1.7)}$$



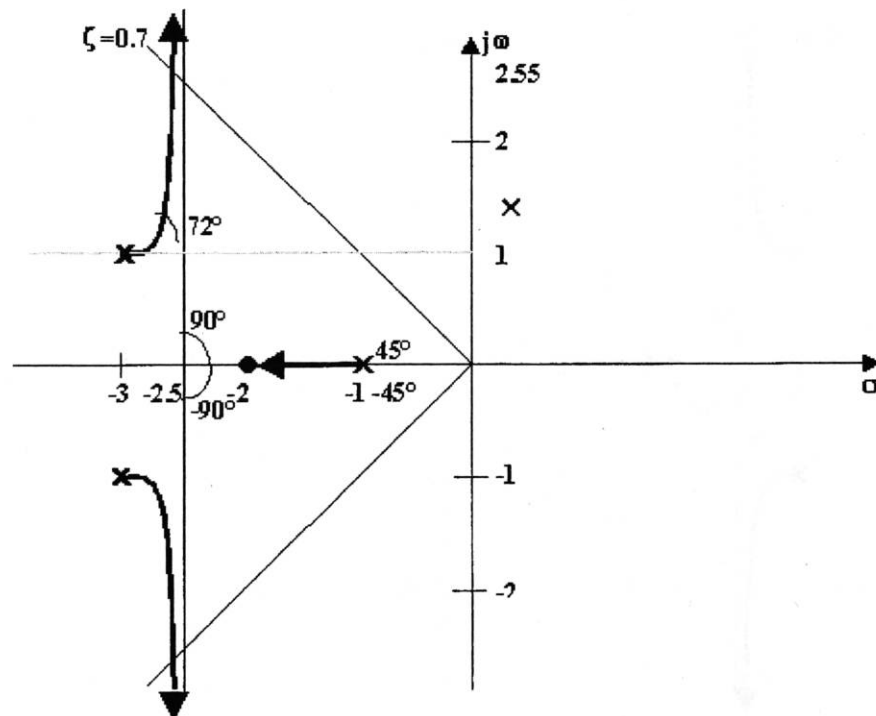
Aplicando la trasformada inversa de Laplace:

$$c(t) = (0.68 - 1.05j)e^{-(2.6-2.5j)t} + (-0.17 + 1.62j)e^{-(2.6+2.5j)t} + 0.27e^{-1.7t}$$

$$C = \frac{6.5(s+2)}{(s+2.6-2.5j)(s+2.6+2.5j)} \Big|_{s=-1.7} = \frac{6.5(-1.7+2)}{(-1.7+2.6-2.5j)(-1.7+2.6+2.5j)}$$

$$= \frac{1.95}{(0.9-2.5j)(0.9+2.5j)} = \frac{1.95}{7.06} = 0.27$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{0.68-1.05j}{(s+2.6-2.5j)} + \frac{-0.17+1.62j}{(s+2.6+2.5j)} + \frac{0.27}{(s+1.7)}$$



9.- $\sum Z - \sum P = \Pi$ (Ángulos de partida)

$$-(\operatorname{tg}^{-1} \frac{10}{-50} + \operatorname{tg}^{-1} \frac{10}{-25} + 90 + \theta_x) = 180$$

$$-(168.69 + 158.198 + 90 + \theta_x) = 180$$

$$\theta_x = -596.9$$

$$\theta_x = 123.1$$

$$GH(S) + 1 = 0$$

$$S(S + 25)(s^2 + 100s + 2600) + 6500k = 0$$

Desarrollando:

$$s^4 + 125s^3 + 5100s^2 + 65000s + 65000k = 0$$

10.- Intersección con el eje imaginario

Criterio De Routh

S^4	1	5100	65000k
S^3	125	65000	0
S^2	4580	65000k	0
S^1	65000-1774k	0	0
S^0	65000K	0	0

Para que el sistema sea estable:

$$65000 - 1774k > 0$$

Desarrollando:

$$k < (65000)/(1774.02)$$

$$k < 36.64$$

sustituyendo en la ecuación característica:

$$4580s^2 + 65000(36.64) = 0$$

$$S_{1,2} = \pm 22.8j$$

8.- Puntos de separación $\partial k / \partial s = 0$

$$\frac{\partial}{\partial s}(s^4 + 125s^3 + 5100s^2 + 65000s) = 0$$

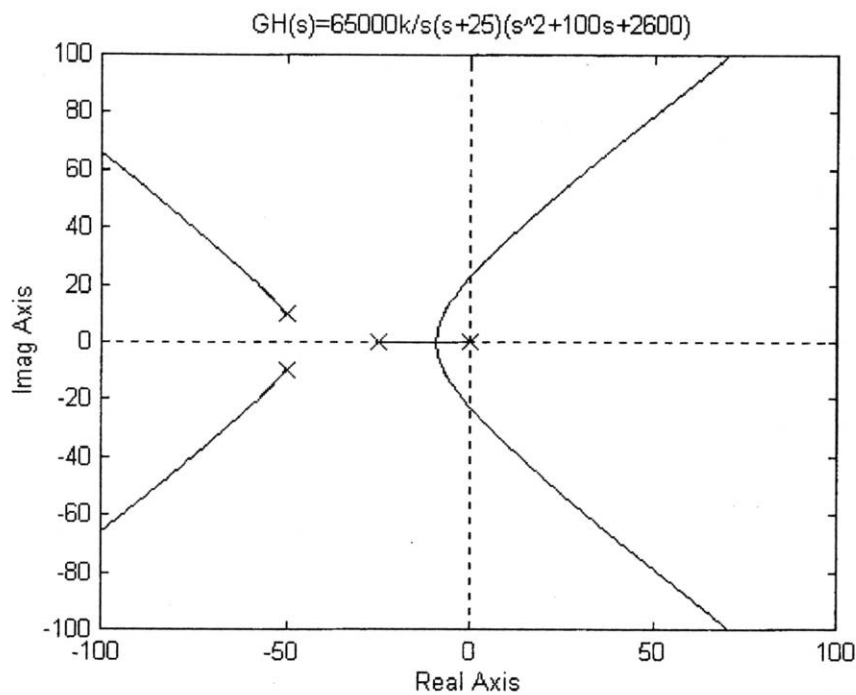
$$4s^3 + 375s^2 + 10200s + 65000 = 0$$

$$S_1 = -45.95$$

$$S_2 = -9.5$$

$$S_3 = -38.64$$

Nota : se escoge S_2 porque está en $(-25,0)$



$$\cos \theta = \delta$$

$$\cos \theta = 0.5$$

$$\theta = 60^\circ$$

\therefore Se grafica $\theta = 60^\circ$ en la gráfica del L de R , donde cruza la grafica se encuentra el punto de raíces dominantes.

De la gráfica en la intersección se obtiene el punto $S_{1,2} = -6.6 \pm 11.4j$

Para encontrar el valor de K_1 se utiliza la condición del modulo aplicado a la ecuación característica.

$$1+GH(S)=0$$

$$GH(S) = -1$$

La condición de módulo es: $65000k = |s||s+25||s+50+10j||s+50-10j|$

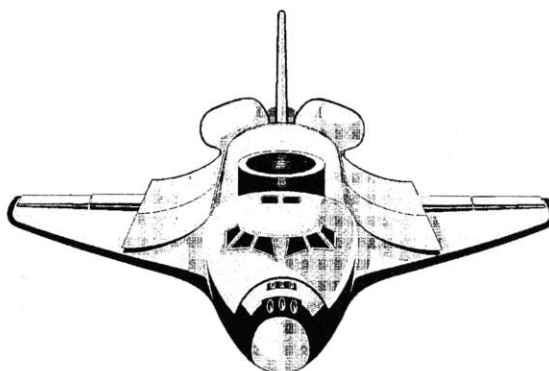
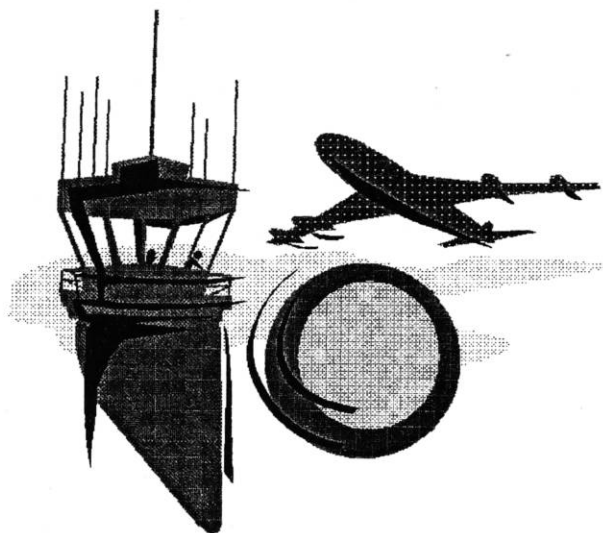
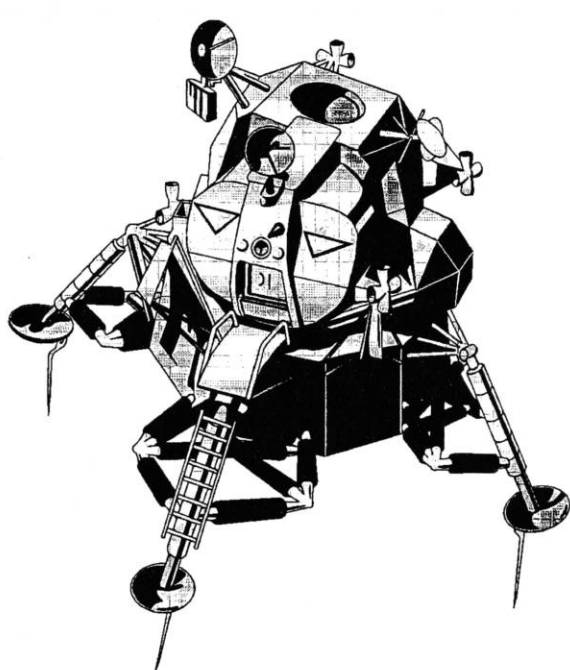
Con $S = -6.6 \pm 11.4j$

$$K = \frac{\sqrt{(6.6)^2 + (11.4)^2} \sqrt{(18.4)^2 + (11.4)^2} \sqrt{(43.4)^2 + (21.4)^2} \sqrt{(43.4)^2 + (1.4)^2}}{65000}$$

$$K = 9.21$$

III

COMPENSACIÓN DE SISTEMAS



III.1 COMPENSACIÓN POR AJUSTE A LA GANANCIA

1. Sea un sistema de control de realimentación unitaria cuya función de transferencia directa está dada por $G(S) = K / S(S + 1)(S + 2)(S + 3)$. Determine el valor de K de modo que los polos dominantes de lazo cerrado tengan una relación de amortiguamiento de 0.5

Solución:

La especificación de la relación de amortiguamiento exige que los polos de lazo cerrado queden ubicados sobre rectas a 60° con el semiplano izquierdo de S, esto es:

$$\cos \theta = \xi = 0.5 \quad \theta = 60^\circ$$

Sabemos que cualquier punto sobre la recta cumple con $\xi = 0.5$, pero debemos determinar un punto sobre la recta que sea lugar de las raíces para lo cual trazamos el mismo.

$S(S+1)(S+2)(S+3)+K = 0$ Ecuación Característica.

$$S^4 + 6S^3 + 11S^2 + 6S + K = 0$$

S^4	1	11	K	$6 - 3/5 K > 0$	Con $K < 10$
S^3	6	6	0	$10S^2 + K = 0$	$S = \pm 1j$
S^2	10	K			
S^1	$6-3/5K$				
S^0	K				

Asintotas:

$$\frac{(2K+1)\pi}{P-Z} = \frac{(2K+1)\pi}{4} \quad \text{donde } K = 0,1,2,3$$

$$= 45^\circ$$

$$= 135^\circ$$

$$= 225^\circ$$

$$= 315^\circ = -45^\circ$$

Cruce de las asintotas con el eje real:

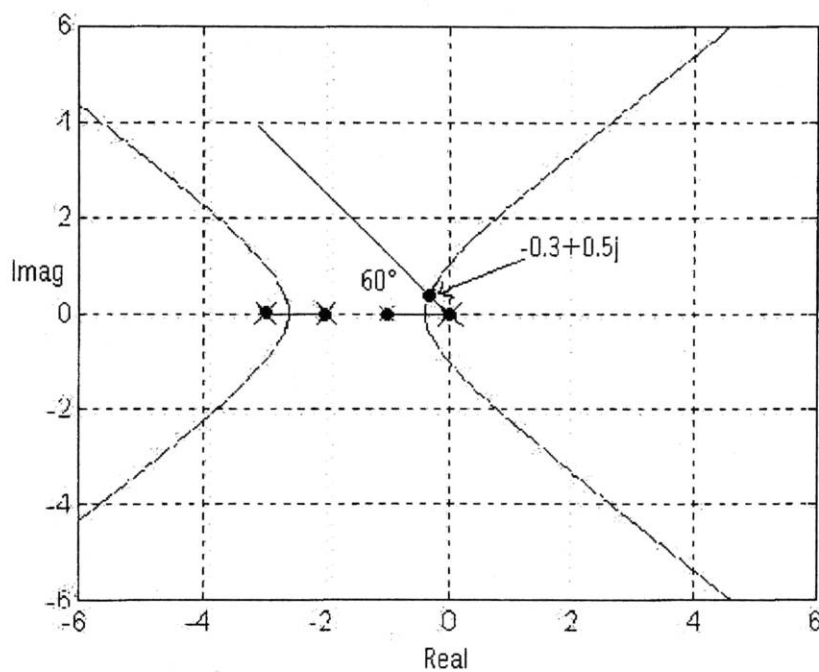
$$\sigma_x = \frac{0-1-2-3}{4} = -1.5$$

Puntos de arranque:

$$S^4 + 6S^3 + 11S^2 + 6S + K; \quad K = -S^4 - 6S^3 - 11S^2 - 6S$$

$$dK/dS = 4S^3 + 18S^2 + 22S + 6 = 0 \quad \text{Resolviendo}$$

$$S_1 = -0.39 \quad S_2 = -2.45$$

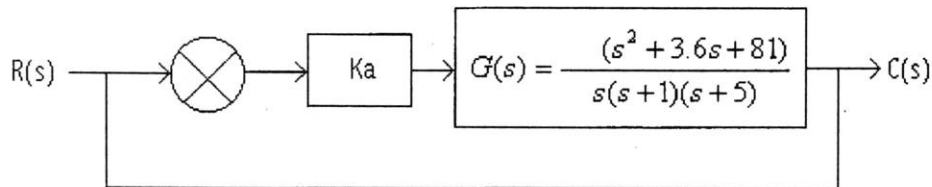


En el cruce con la línea de 60° se tiene que el polo está ubicado en $-0.3 + 0.5j$, aplicando la condición de módulo se tiene:

$$\left| \frac{K}{S(S+1)(S+2)(S+3)} \right|_{S=-0.3+0.5j} = 1 \quad \text{despejando K tenemos que } K = 2.44$$

Así, se tienen polos en $-0.3 + 0.5j$ con $\xi = 0.5$ y $K = 2.44$

2. Encuentre el valor del compensador de ajuste a la ganancia K_a para que el sistema de control cumpla con un máximo de sobreimpulso del 4%.



Solución:

Primero dibujamos el lugar de las raíces, utilizando las reglas de construcción.

1) Puntos de inicio

$$S_1 = 0 \quad S_2 = -1 \quad S_3 = -5$$

2) Puntos de llegada

$$S_{1,2} = -1.8 \pm j8.82$$

3) Ramas separadas

3 ramas

4) Simetría

Existe

5) Zonas del LR

de $-\infty$ a -5 y de -1 a 0

6) Asíntotas

1 asíntota $\beta_0 = 180$

7) Centroide

$$c = (0 - 1 - 5) - (-1.8 + j8.82 - 1.8 - j8.82) = -2.4$$

8) Ángulo de partida o llegada

$$\tan \theta_1 = \frac{8.82}{3.2} \quad \theta_1 = 70^\circ \quad \theta_2 = 90^\circ$$

$$\tan \theta_3 = \frac{8.82}{0.8} \quad \theta_3 = 95.182714$$

$$\tan \theta = \frac{8.82}{1.8} \quad \theta_4 = 101.53462$$

$$\theta_2 + \theta_x - \theta_1 - \theta_3 - \theta_4 = -180$$

$$\theta_x = 356.7$$

9) Intersección del LR

$$F(s) = 1 + G(s) = 1 + \frac{Ka(s^2 + 3.6s + 81)}{s(s+1)(s+5)} = 0$$

$$s^3 + s^2(6Ka) + s(5+3.6Ka) + 81Ka = 0$$

s^3	1	$(5+3.6Ka)$	0
s^2	$(6+Ka)$	81Ka	0
s^1	$\frac{3.6K^2a - 54.4Ka + 30}{6 + Ka}$	0	0
s^0	81Ka	0	0

$$Ka > 0 \quad 3.6 K^2a - 54.4Ka + 30 > 0 \quad Ka_1 = 0.57 \quad s_{1,2} = \pm 2.6$$

$$Ka_2 = 14.54 \quad s_{3,4} = \pm 7.57$$

10) Puntos de arranque

$$\frac{dKa}{ds} = 0 \quad s^4 + 7.2s^3 + 259.6s^2 + 972s + 40s = 0$$

$$s_1 = -0.48$$

$$s_2 = -3.47$$

$$s_{3,4} = -1.63 \pm j15.57$$

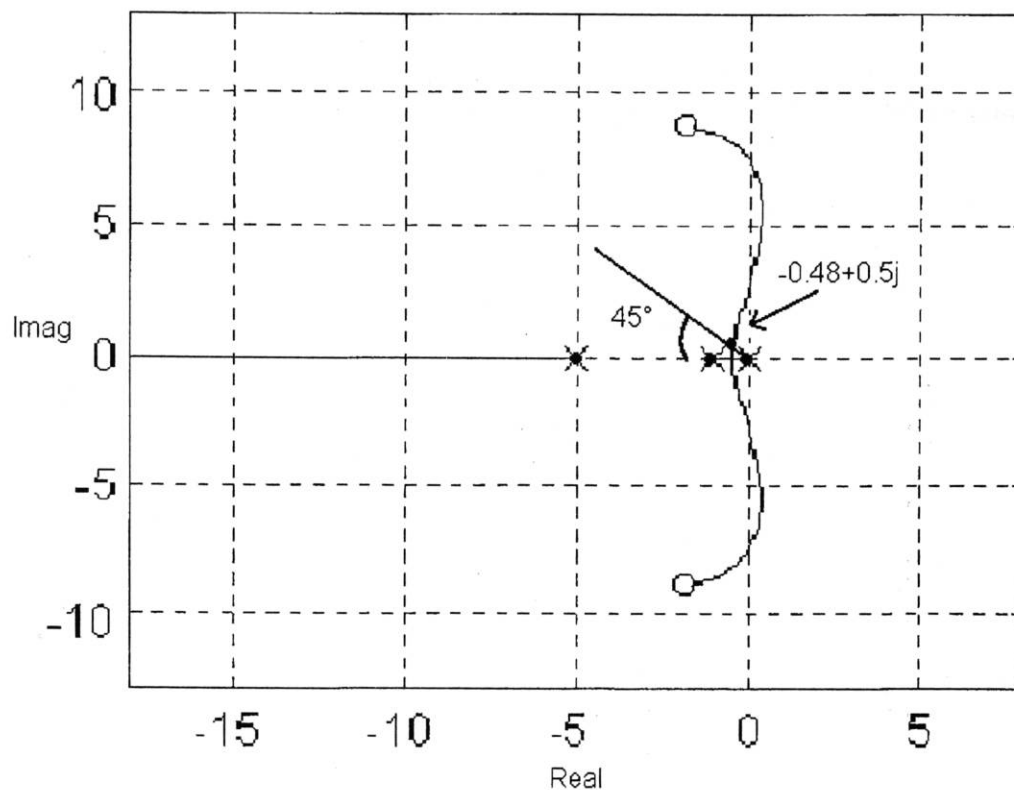
Para $M_p = 4\%$ se tiene que $\xi = 0.7$

$$\theta = \cos^{-1} 0.707$$

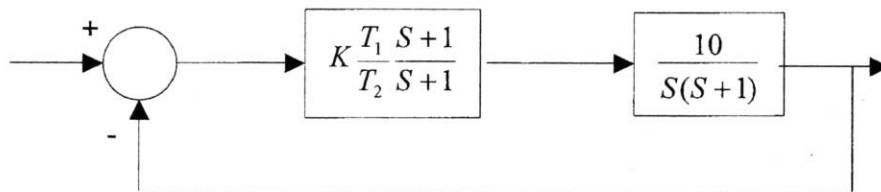
$$\theta = 45^\circ$$

$$s_{1,2} = -0.48 \pm j0.5$$

$$K = \left| \frac{S(S+1)(S+5)}{S^2 + 3.6S + 81} \right|_{s_{1,2} = -0.48 \pm j0.5} = 0.028$$



3. Determine los valores de K , T_1 y T_2 del sistema que se muestra en la siguiente figura, de manera que los polos dominantes de lazo cerrado tengan $\xi = 0.5$ y $\omega_n = 3$ rad / seg.



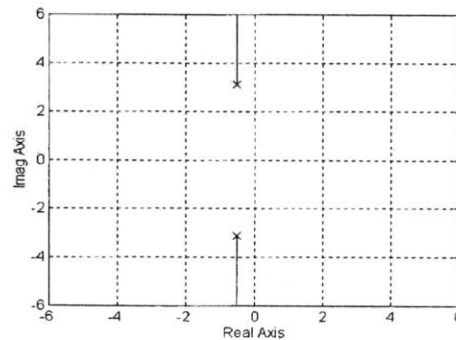
Solución: Sea $G(s) = \frac{10}{S(S+1)}$ y $G_c(s) = K \frac{T_1}{T_2} \frac{S+1}{S(S+1)}$

La función de lazo cerrado sin compensador es:

$$F(s) = \frac{10}{S(S+1)+10} = \frac{10}{(S-\frac{1}{2}+j\sqrt{9.75})(S-\frac{1}{2}-j\sqrt{9.75})}$$

Por lo que los polos de lazo cerrado son: $-\frac{1}{2} \pm j\sqrt{9.75}$

Por lo que $\omega_n = 3.16$ y $\theta = 81^\circ$ así, $\xi = \cos\theta = 0.158$



Como se puede observar los valores ω_n y ξ no corresponden a los requeridos, por lo que se procede a calcular el compensador.

Se desea una relación de amortiguamiento $\xi = 0.5$

De donde decimos que $\theta = \cos^{-1} \xi = 60^\circ$

Por lo tanto la localización actual deseada de los polos es:

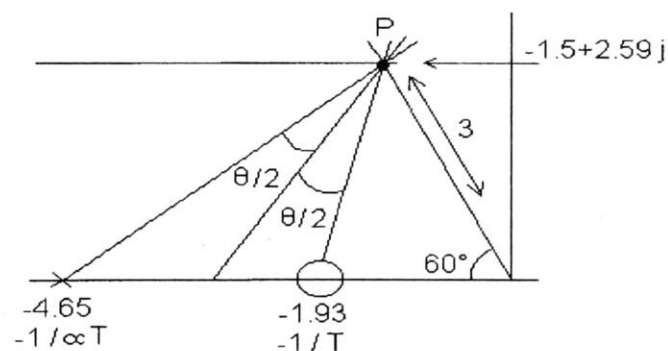
$$S_{1,2} = \omega_n \angle \pm 60^\circ = -1.5 \pm 2.59j$$

En el sistema actual, el ángulo de $G(s)$ en el polo de lazo abierto es:

$$\angle \frac{10}{S(S+1)} = -221^\circ$$

$$\theta_c = \pi - \angle -221^\circ = 41^\circ$$

La red de adelanto debe contribuir entonces con $\phi_c = 41^\circ$, el siguiente paso es determinar las ubicaciones del polo y el cero de la red de adelanto.



La determinación de éstos se hace mediante métodos gráficos de la forma arriba mostrada y $(\phi_c / 2) = 20.5^\circ$

Por lo tanto $G_c(s) = K_c \frac{S+1.93}{S+4.65}$

Entonces, la función de transferencia en lazo abierto se convierte en:

$$G_c(s)G(s) = K_c \frac{S+1.93}{S+4.65} \frac{10}{S(S+1)} = K_1 \frac{(S+1.93)}{S(S+4.65)(S+1)}$$

Para determinar K_1 , se emplea la siguiente condición:

$$\left| K_1 \frac{(S+1.93)}{S(S+4.65)(S+1)} \right|_{S=-1.5+j5.19/2} = 1 \quad \text{Despejando } K_1 \text{ se obtiene lo siguiente:}$$

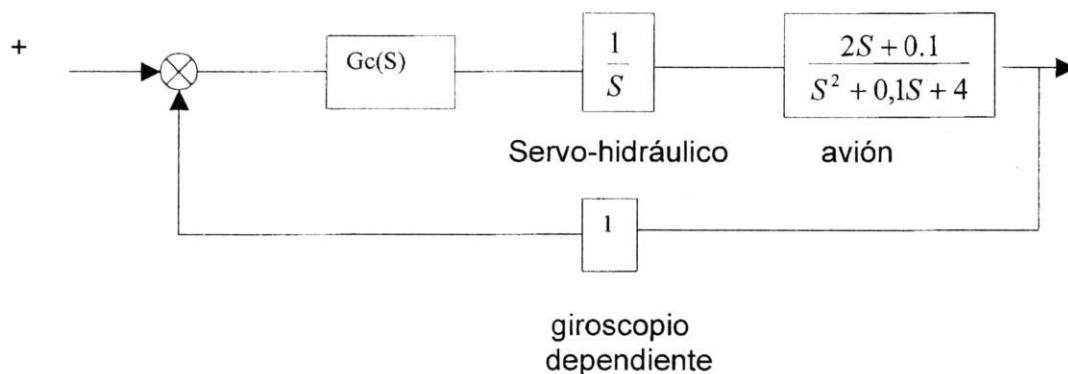
$K_1 = 12.3$ y de aquí que $K_c = K_1 / 10 = 1.23$

$$\therefore G_c(s) = 1.23 \frac{S+1.93}{S+4.65} = 0.5 \frac{(0.5181S+1)}{(0.215S+1)} = K \frac{T_1S+1}{T_2S+1}$$

$K = 0.5, T_1 = 0.5181$ y $T_2 = 0.215$

III.2 COMPENSACIÓN POR ADELANTO DE FASE

4. Dado el sistema de control de posición. Diseñe un compensador $G_c(s)$ tal que los polos (dominantes) complejos conjugados estén situados en $S = -2 \pm 2j$.



Solución:

La función de transferencia de lazo abierto es:

$$GH(s) = \frac{1}{s} \left(\frac{2s + 0.1}{s^2 + 0.1s + 4} \right)$$

Determinamos la ecuación característica:

$$1 + GH(s) = 0$$

$$1 + \frac{2s + 0.1}{s(s^2 + 0.1s + 4)} = 0$$

$$s^3 + 0.1s^2 + 4s + 2s + 0.1 = 0$$

$$s^3 + 0.1s^2 + 6s + 0.1 = 0$$

$$s_1 = -2 + 2j$$

$$s_2 = -2 - 2j$$

$$s_3 = -0.0167$$

Ahora para el polo deseado tienen $s_1 = -2 + 2j$

$$\zeta \omega_n = 2 \quad \text{pero} \quad \zeta = \cos^{-1} 45^\circ = 0.7071 \rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{2}{2} = 45^\circ$$

$$\omega_n = \frac{2}{\zeta} = \frac{2}{0.7071} = 2.82 \text{ rad/seg}$$

Como se observa, las especificaciones de ζ y ω_n es diferente por lo que requiere emplear una red de adelanto, pues se necesita compensar únicamente el estado transitorio.

$$\phi_{adelanto} + \angle G(s_1) = \pi$$

$$\phi_{adelanto} = \pi - \angle G(s_1)$$

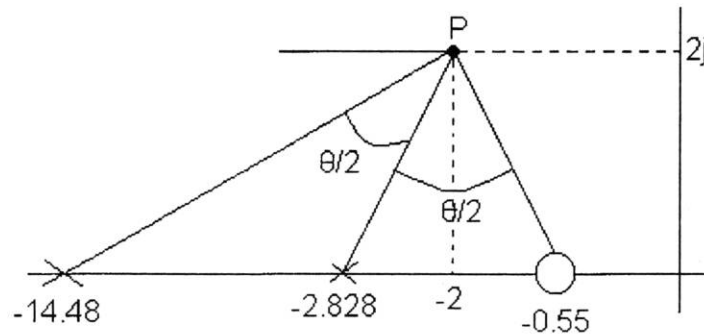
$$\angle G(s_1) = \left| \frac{1}{s} \frac{2s + 0.1}{s^2 + 0.1s + 4} \right|_{s=-2+2j} = \frac{1}{(-2+2j)} \left(\frac{2(-2+2j) + 0.1}{(-2+2j)^2 + 0.1(-2+2j) + 4} \right)$$

$$\angle G(s_1) = \frac{1}{(-2+2j)} \left(\frac{-4+4j+0.1}{4-2(2)(2j)-4-0.2+0.2j+4} \right)$$

$$\angle G(S_1) = \frac{1}{(-2+2j)} \left[\frac{-3.9+4j}{3.8-7.8j} \right] = \frac{134.27^\circ}{135^\circ-64.02^\circ} = 63.3^\circ$$

$$\phi_{adelanto} = 180^\circ - 63.3^\circ = 116.7^\circ$$

Se utilizará el mismo método gráfico para encontrar el polo y el cero, que en el problema anterior.



$$\phi_C / 2 = 58^\circ \quad ; \quad \phi_C = 116.71^\circ$$

Por lo que $G_C(S) = K_C \frac{S + 0.554}{S + 14.48}$

Resolviendo K_C para que satisfaga:

$$\left| \frac{K_C (S + .554)(2S + .1)}{(S + 14.48)(S)(S^2 + .1S + 4)} \right|_{S=-2+2j} = 1 \quad K_C=22.4$$

Por lo tanto el compensador queda: $G_C(S) = 22.4 \frac{S + .554}{S + 14.48}$

III.3 COMPENSACION POR ATRASO-ADELANTO DE FASE

5. Sea un sistema de control de realimentación unitaria cuya función de transferencia directa está dada por $G(s) = 10 / S(S + 2)(S + 8)$. Projete un comparador de forma tal, que el coeficiente estático de error de velocidad K_v sea igual a 80 seg^{-1} y los polos dominantes de lazo cerrado estén situados en:

$$S = -2 \pm 2j\sqrt{3}$$

Solución:

Debido a que en este problema se necesitan mejoras tanto en respuesta transitoria como en estado de régimen permanente ($K_v = 80 \text{ seg}^{-1}$), entonces hay que utilizar simultáneamente compensación de adelanto y atraso.

Sabemos que el polo dominante debe estar situado en:

$$\angle \frac{10}{S(S+2)(S+8)} \Big|_{S=-2 \pm 2j\sqrt{3}} = -240^\circ$$

$$\theta_c = \pi - (-240^\circ) = 60^\circ$$

La porción de adelanto de fase de la red de atraso-adelanto debe contribuir con 60° de manera que el lugar de las raíces pase por la posición deseada de los polos dominantes de lazo cerrado.

Así, el comparador de atraso-adelanto tiene la función de transferencia

$$G_c(S) = \left(\frac{S + \frac{1}{T_1}}{S + \frac{B}{T_1}} \right) \left(\frac{S + \frac{1}{T_2}}{S + \frac{1}{BT_2}} \right) K_c$$

$$K_v = \lim_{S \rightarrow 0} S G_c(S) G(S) = \lim_{S \rightarrow 0} S K_c G(S)$$

$$K_v = \lim_{S \rightarrow 0} S \frac{10 K_c}{S(S+2)(S+8)} = 80 \quad \text{entonces} \quad 10/16 K_c = 80 \quad K_c = 128$$

El sistema compensado tendrá la forma de lazo abierto

El sistema compensado tendrá la forma de lazo abierto

$$G_C(S)G(S) = \left(\frac{S + \frac{1}{T_1}}{S + \frac{B}{T_1}} \right) \left(\frac{S + \frac{1}{T_2}}{S + \frac{1}{BT_2}} \right) \frac{1280}{S(S+2)(S+8)}$$

Como se elige T_2 suficientemente grande como para que

$$\left| \frac{S + \frac{1}{T_1}}{S + \frac{B}{T_1}} \right|_{S=-2+2\sqrt{3}j} = 1$$

Entonces la condición de amplitud

$$\left| \frac{S + \frac{1}{T_1}}{S + \frac{B}{T_1}} \right| \left| \frac{1280}{S(S+2)(S+8)} \right|_{S=-2+2\sqrt{3}j} = 1$$

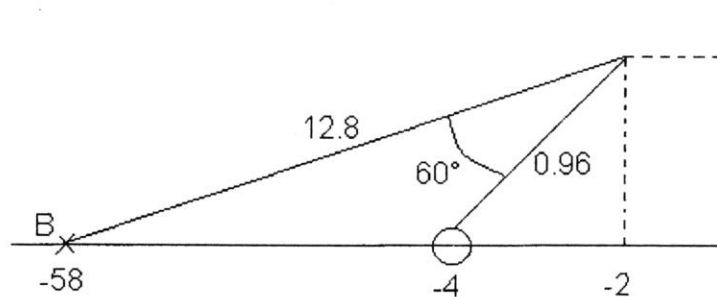
$$\left| \frac{S + \frac{1}{T_1}}{S + \frac{B}{T_1}} \right| \left| \frac{1280}{4(3.464)(6.928)} \right|_{S=-2+2\sqrt{3}j} = 1$$

Y la condición de ángulo se convierte en

$$\left| \frac{S + \frac{1}{T_1}}{S + \frac{B}{T_1}} \right| \frac{12.8}{.96} = 1$$

$$\angle \frac{S + \frac{1}{T_1}}{S + \frac{B}{T_1}} \bigg|_{S=-2+2\sqrt{3}j} = 60^\circ$$

Para determinar los valores de T_2 y B que cumplan con las condiciones de amplitud y ángulo se tiene que cumplir lo siguiente:



$$T_2 = 1/3.8 = 0.263 \quad \text{y} \quad B = 58 T_1 = 58(0.263) = 15.263$$

La porción de adelanto de fase de la red de atraso-adelanto se convierte en:

$$\angle \frac{S + 3.8}{S + 58} \bigg|_{S=-2+2\sqrt{3}j} = 59^\circ 30'$$

Para la porción de atraso de fase se puede elegir

$$T_2 = 10 \quad 1/BT_2 = 0.00655$$

Así, $(S + 0.1) / (S + 0.0066)$ esta red debe cumplir con:

$$\left| \frac{S + 0.1}{S + 0.0066} \right|_{S=-2+2\sqrt{3}j} = 1$$

$$0^\circ < \angle \frac{S + 0.1}{S + 0.0066} \bigg|_{S=-2+2\sqrt{3}j} = 1.166^\circ < 3^\circ$$

Por lo tanto el sistema compensado tiene la función de transferencia de lazo abierto:

$$G_C(S)G(S) = \frac{(S + 3.8)(S + 0.1)(1280)}{(S + 58)(S + 0.0066)(S + 2)(S + 8)}$$

6. Un sistema retroalimentado tiene la siguiente función de transferencia en lazo abierto.

$$H(S)G(S) = K / S(S+2)$$

Diseñar una compensación por adelanto de fase que cumpla con las siguientes especificaciones.

- a) Error menor o igual al 5% en estado permanente para una entrada de rampa
- b) Que el margen de fase de el sistema sea aproximadamente de 45°.

Con Diagrama de Bode y lugar de raíces.

Solución:

Para cumplir la condición de:

$$e_{ss} = 5\% = 0.05$$

$$K_v = 20$$

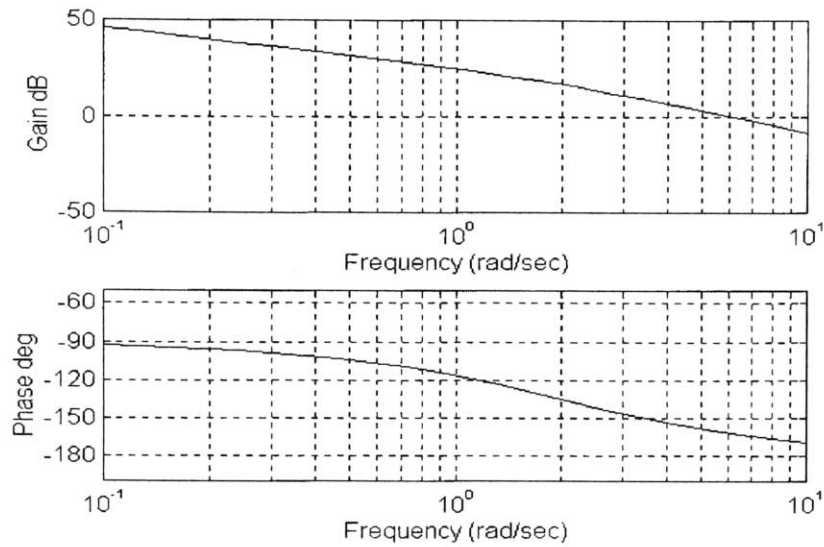
$$K_v = \lim_{S \rightarrow 0} S \frac{K}{S(S+2)} = \frac{K}{2} = 20$$

$$S \rightarrow 0$$

$$\therefore K = 40$$

La función de transferencia de lazo abierto es: $GH(s) = \frac{40}{S(S+2)}$

Obtenemos los diagramas de Bode y el margen de fase:



En la gráfica que se muestra el diagrama de Bode para la función anterior. En esta gráfica se puede ver que el sistema sin compensación tiene un margen de fase 18°, la especificación pide un margen de fase de 45°, entonces el adelanto de fase adicional necesario para satisfacer la condición es de $45^\circ - 18^\circ = 27^\circ = \phi_m$ se sabe que $\sin \phi_m = 1 - \alpha / 1 + \alpha$.

Despejando α de esta ecuación.

$$\alpha = \frac{1 - \sin \phi_m}{1 + \sin \phi_m} = \frac{1 - \sin(27^\circ)}{1 + \sin(27^\circ)} = 0.3755$$

La función de transferencia de un compensador de adelanto es:

$$G_c(s) = \alpha \frac{1 + TS}{1 + \alpha TS}$$

Con $\alpha < 1$

Ya se determinó α , el siguiente paso es determinar las frecuencias de corte $\omega=1 / T$ y $\omega=1 / \alpha T$. Para hacerlo, se observa que el ángulo de adelanto ϕ_m se produce en la media de las dos frecuencias de corte, o sea, en

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

El valor de la modificación en la curva de amplitud en $\omega = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$ es

$$\left| \frac{1+j\omega T}{1+j\omega\alpha T} \right|_{\omega=\frac{1}{T\sqrt{\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = 1.63dB$$

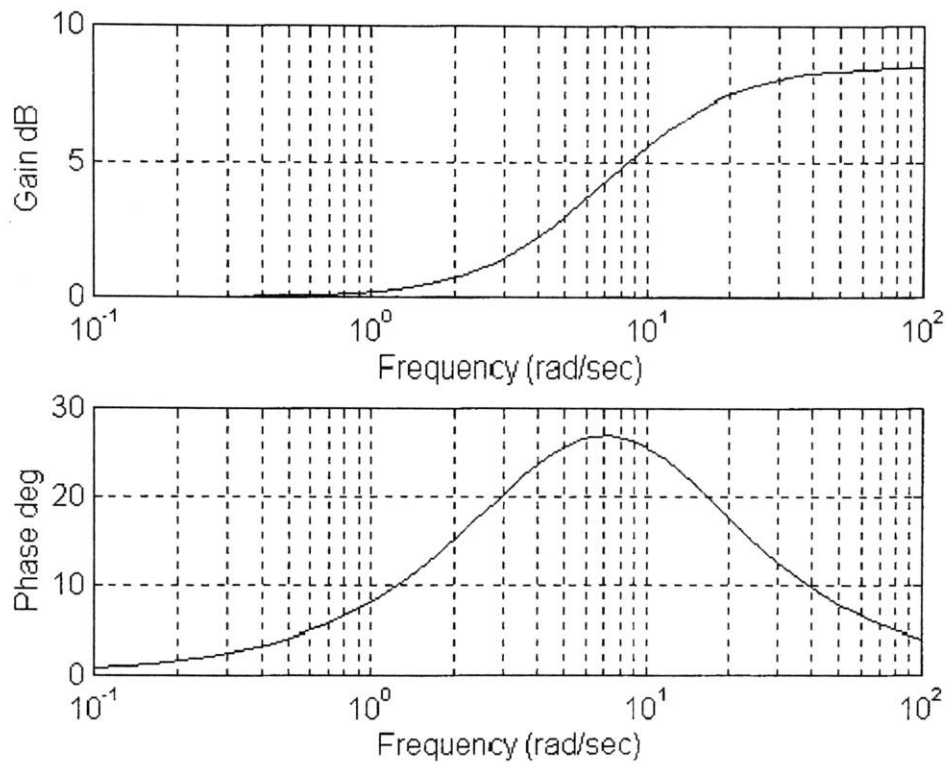
Y la magnitud del sistema sin compensar vale -1.632 db cuando $\omega=7$ rad/seg. Se toma esta frecuencia como la nueva frecuencia de transición de ganancia, ω_c .

$$\frac{1}{T} = \sqrt{\alpha}\omega_c = 4.28 \quad \Rightarrow \quad T = 0.2336$$

$$\frac{1}{\alpha T} = \omega_c / \sqrt{\alpha} = 11.42 \quad \Rightarrow \quad T\alpha = 0.0875$$

Gráfica que muestra el comportamiento del siguiente sistema compensador:

$$\frac{0.2336S + 1}{0.0875S + 1}$$



La red de adelanto queda así:

$$G_C(S) = K_C \frac{S + 4.28}{S + 11.42} = K_C 0.375 \frac{0.2336S + 1}{0.0875S + 1}$$

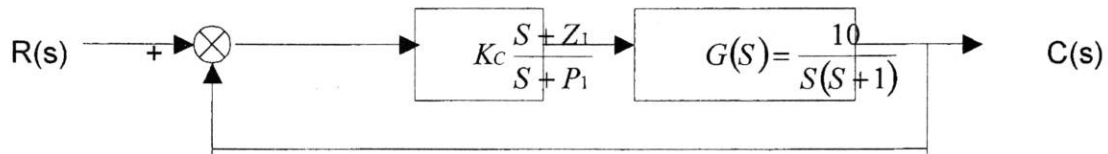
K_C Sirve para compensar la atenuación producida por la red de adelanto;

$$K_C = 1 / 0.375 = 2.663$$

Finalmente el compensador queda definido como sigue:

$$G(S) = \frac{0.2336S + 1}{0.0876S + 1}$$

7. Determinar los valores de K_1 , T_1 y T_2 del sistema que aparece en la figura, de manera que los polos dominantes de lazo cerrado tengan $\zeta = 0.5$ y $\omega_n = 3$ rad / seg.



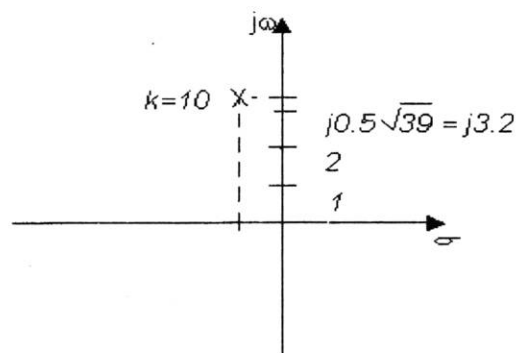
La función de transferencia de lazo cerrado de $G(s)$ es:

$$GH(s) = \frac{G(s)}{1 + GH(s)} = \frac{10}{s(s+1)+10} = \frac{10}{s^2 + s + 10}$$

Entonces:

$$s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(10)^2}}{2} = \frac{-1 \pm j\sqrt{39}}{2}$$

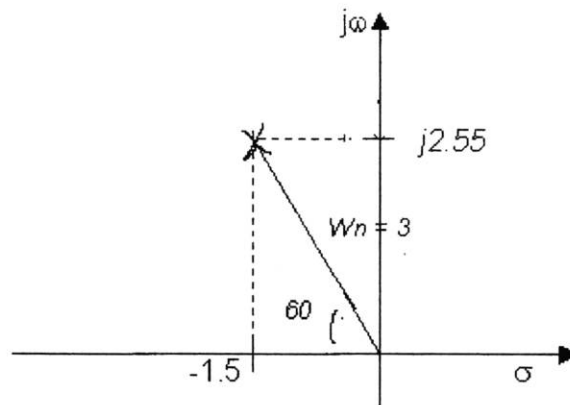
$$GH(s) = \frac{10}{(s + 0.5 - j0.5\sqrt{39})(s + 0.5 + j0.5\sqrt{39})}$$



Como se requiere un $\zeta = 0.5$

$$\zeta = \cos\theta \Rightarrow \theta = \cos^{-1} 0.5 = 60^\circ$$

$$\omega_n = 3/\zeta_{\text{test}} = 3 \text{ rad/seg}$$



La fase del compensador es:

$$\angle G(s) + \phi = \pm\pi \Rightarrow \angle G(s) = \pm\pi - \phi$$

$$G(s_1) = \frac{10}{(-1.5 + j2.55)(-2 + j2.55 + 1)} = \frac{10}{(-1.5 + j2.55)(-1 + j2.55)}$$

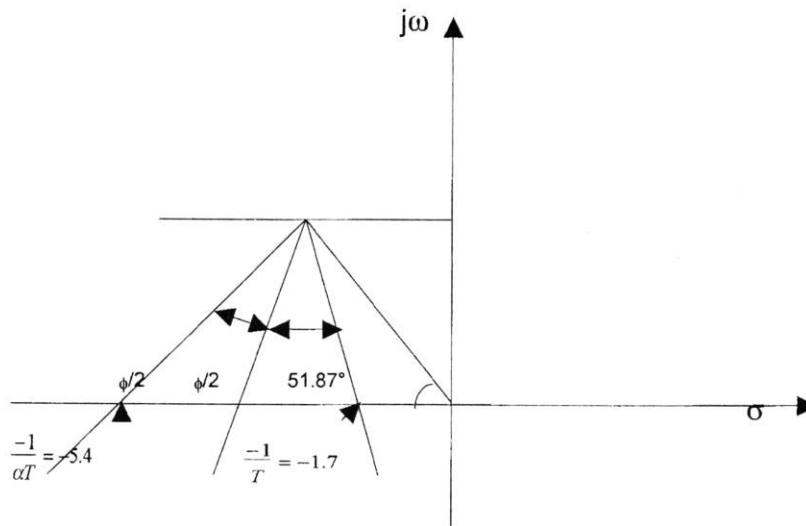
$$\angle G(s_1) = 0 - \tan^{-1} \frac{2.55}{-1.5} - \tan^{-1} \frac{2.55}{-1} = 0^\circ - 120.46^\circ - 111.412^\circ = -231.87^\circ$$

Por lo tanto:

$$\angle G(s_c) = 180^\circ + 231.87^\circ = 51.87^\circ$$

Entonces el compensador quedaría de la siguiente forma:

$$\frac{s+1.7}{s+5.4}$$



Como ya se encontraron el polo y el cero del compensador, se determinara la ganancia K necesaria para tener que $H_c = 1$

$$\left| \frac{10(s_1 + 1.7)}{s_1(s_1 + 1)(s_1 + 5.4)} \right| = 1 \quad \Rightarrow \quad K = \left| \frac{s_1(s_1 + 1)(s_1 + 5.4)}{10(s_1 + 1.7)} \right|_{s_1 = -1.5 + j2.55}$$

$$K = \left| \frac{(-1.5 + j2.55)(-0.5 + j2.55)(3.9 + j2.55)}{10(-0.2 + j2.55)} \right| = \frac{\sqrt{(1.5)^2 + (2.55)^2} \sqrt{(0.5)^2 + (2.55)^2} \sqrt{(3.9)^2 + (2.55)^2}}{\sqrt{(0.2)^2 + (2.55)^2}}$$

$$\Rightarrow K_c = 1.4 \quad \therefore K \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1} = 1.4 \frac{s + 1.7}{s + 5.4}$$

8. Un sistema de retroalimentación unitaria tiene la función de transferencia $Gx(s)$ donde $K = 4.46$ para $\zeta = 0.7$. Se desea que el sistema, con la adición de un simple compensador de adelanto, tenga un tiempo de establecimiento de 1.6 seg. Y un máximo de sobreimpulso del 4%.

$$Gx(s) = \frac{K(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$

Se utiliza el método del lugar de las raíces para hacer la compensación, hallamos ω_n :

$$T_s = 1.6 \text{ seg}$$

Se tiene que para $\pm 4\%$ de M_p el $\zeta = 0.7$.

$$t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} \Rightarrow \omega_n = \frac{4}{\zeta t_s} = \frac{4}{(0.7)(1.6)} = 3.571 \text{ rad/seg}$$

Por lo tanto el valor del polo deseado es:

$$j\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 3.571 \sqrt{1 - (0.7)^2} = 2.55 \text{ rad/seg}$$

$$\sigma = \zeta \omega_n = 2.5$$

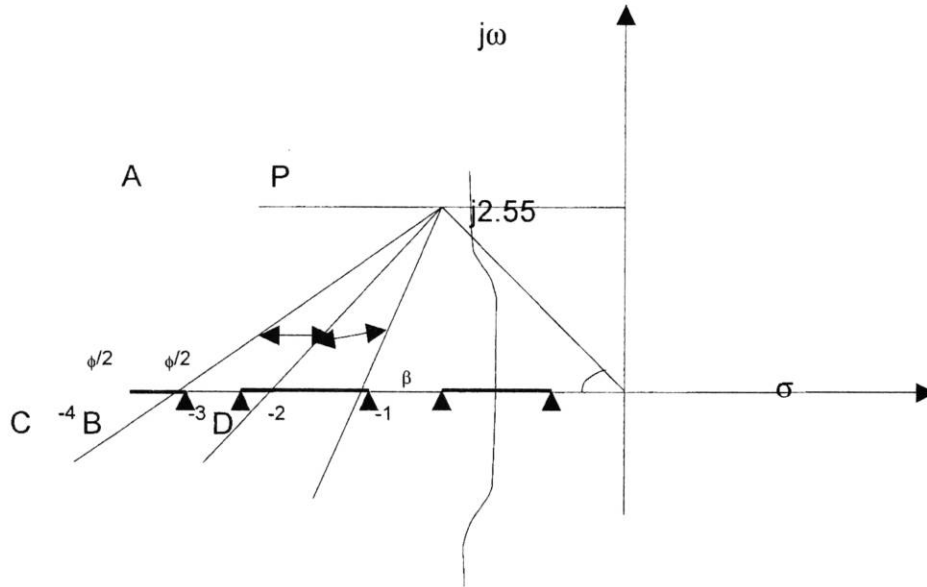
El polo buscado es $s = -2.5 \pm j.255$

- Ahora hay que ver la distribución de cada polo y cero con el polo deseado.

$$\begin{aligned} & \angle(-2.5 + j 2.55) + 3 - \angle(-2.5 + j2.55) + 1 - \angle -2.5 + j 2.55) + 4 \\ & = \angle 0.5 + j2.55 - \angle -1.5 + j2.55 - \angle -0.5 + j2.55 - \angle 1.5 + j2.55 \\ & = 78.91^\circ - 120.47^\circ - 101.09^\circ - 59.53^\circ = -202.18^\circ \end{aligned}$$

Entonces para que el lugar de las raíces pase por el polo deseado, éste debe contribuir con:

$$\phi = 180^\circ + 202.18^\circ = \underline{22.18^\circ}$$



- En la gráfica se traza la recta PA, luego se traza la bisectriz PB del ángulo formado por OP y PA. Se trazan 2 rectas PC y PD formando un ángulo cada una de ellas con PB de $\pm \phi/2 = 11.09^\circ$. La intersección de las rectas PC y PD con el eje real nos da la ubicación del polo y el cero de la red de compensación:

polos $s = -4.3$ cero $s = -3$

Por lo tanto:

$$Gc(s) = \frac{(s+3)}{(s+4.3)} Kc$$

La función de transferencia del sistema ya compensado es:

$$Gc(s)Gx(s) = \frac{(s+3)}{(s+4.3)} Kc \frac{4.46(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+4)} = \frac{(s+3)}{(s+4.3)} K \frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$

$$\left| \frac{K(s+3)(s+3)}{(s+4.3)(s+1)(s+2)(s+4)} \right|_{s=-2.5+j2.55} = 1$$

$$K = \left| \frac{(s+4.3)(s+1)(s+2)(s+4)}{(s+3)(s+3)} \right|_{s=-2.5+j2.55} = \left| \frac{(1.8+j2.55)(-1.5+j2.55)(-0.5+j2.55)(1.5+j2.55)}{(0.5+j2.55)(0.5+j2.55)} \right|$$

$$K = \frac{(3.12)(2.96)(2.6)(2.96)}{(2.6)^2} = \underline{10.51}$$

$$K_c = \frac{K}{4.46} = \underline{2.36}$$

La función de lazo abierto completa es:

$$G(s)H(s) = \frac{(s+3)}{(s+4.3)} \frac{(10.51)(s+3)}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$$

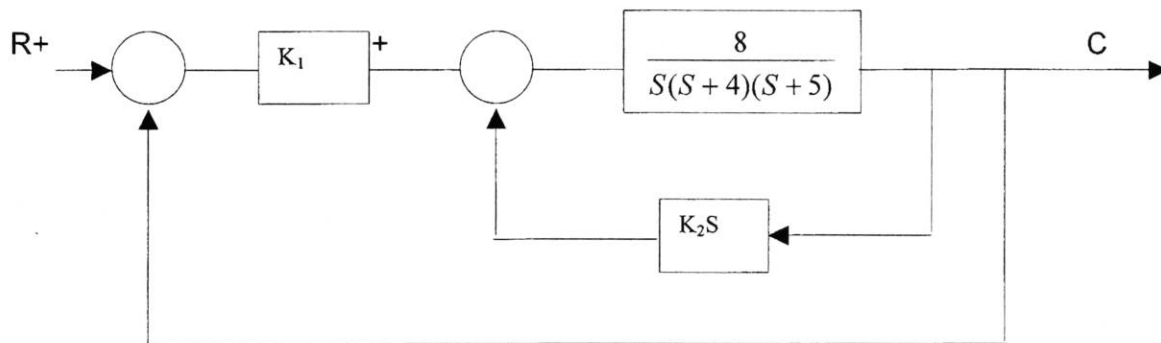
Ahora compararemos Kp del sistema no compensado con el ya compensado:

Del sistema compensado:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+4)} = \frac{3K}{8}$$

$$K = 4.46 \Rightarrow K_p = \underline{1.673}$$

9. Para el sistema que se muestra en el diagrama en bloque de la figura, determinar K_1 y K_2 , de tal manera que el sistema tenga polos de lazo cerrado en $S = -2 \pm 2j$



Vemos la fase:

$$\angle GH(S) = \angle G(S) + \angle G_c$$

$$GH(S) = \frac{K_1}{S(S+4)(S+5)} \left(\frac{K_2 S}{K_1} + 1 \right) = \frac{K_1}{S(S+4)(S+5)} \frac{(K_2 S + K_1)}{K_1} = \frac{K_2 S + K_1}{S(S+4)(S+5)}$$

$$GH(S) = \frac{K_2(S + \frac{K_1}{K_2})}{S(S+4)(S+5)}$$

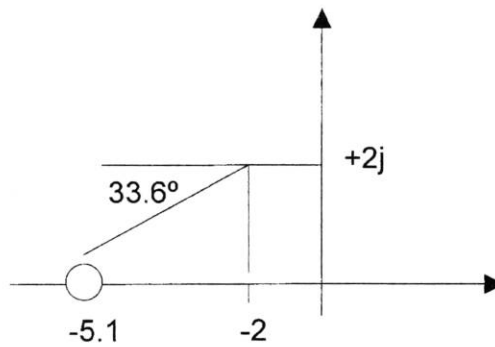
$$\angle G(S_1) = -[(-2 + 2j)(-2 + 2j + 4)(-2 + 2j + 5)] = (-2 + 2j)(2 + 2j)(3 + 2j)$$

$$\angle G(S_1) = -(135^\circ + 45^\circ + 33.69^\circ) = -213.69^\circ$$

$$\phi_C + \angle G(S_1) = \pi$$

$$\phi_C = \pi - \angle G(S_1) = 180^\circ - (-213.69^\circ) = 393.69^\circ = 33.69^\circ$$

Que debe dar el compensador,



en -5.1 está el cero que debe dar la fase.

Por lo tanto la posición del cero es:

$$S + \frac{K_1}{K_2} = -5.1 \Rightarrow \frac{K_1}{K_2} \cong 5.1$$

Se busca la condición de módulo:

$$\left| \frac{K_2(S_1 + 5.1)}{S_1(S_1 + 4)(S_1 + 5)} \right|_{S_1 = -2 + 2j} = 1$$

Se despeja K_2

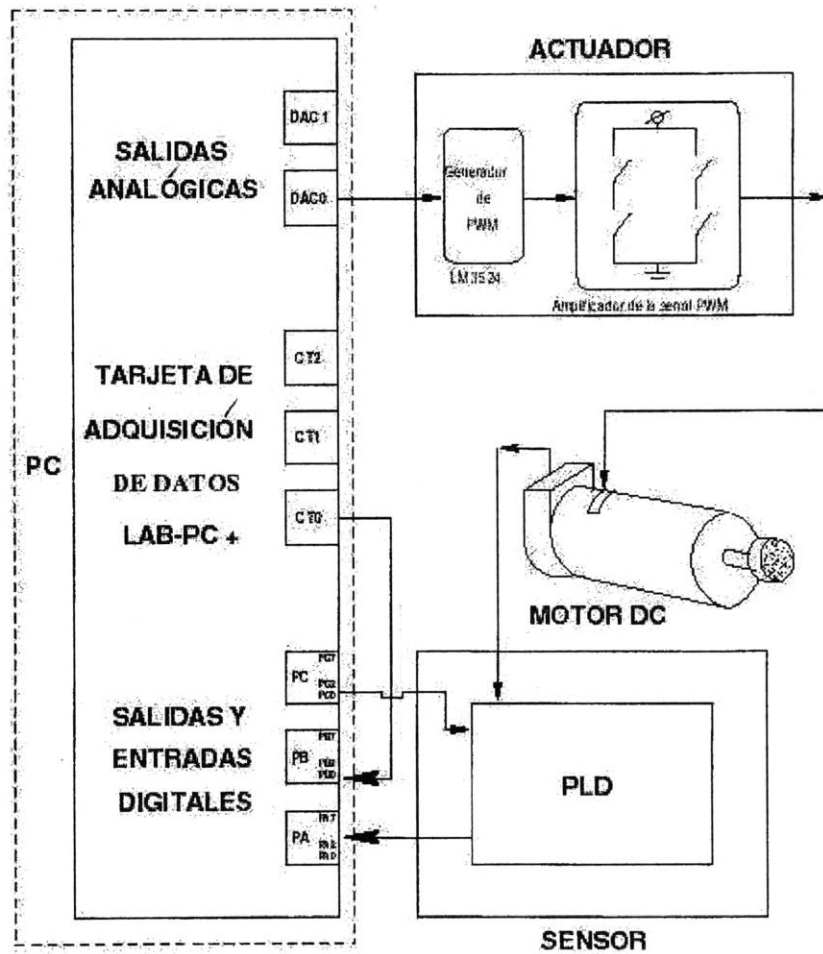
$$K_2 = \left| \frac{S_1(S_1 + 4)(S_1 + 5)}{S_1 + 5.1} \right| = \left| \frac{(-2 + 2j)(-2 + 2j + 4)(-2 + 2j + 5)}{-2 + 2j + 5.1} \right| =$$

$$= \frac{\sqrt{2^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + 3^2}}{\sqrt{3.1^2 + 2^2}} = 7.81$$

Despejamos a K_1

$$\frac{K_1}{K_2} = 5.1 \Rightarrow K_1 = 5.1(7.81) = 39.83$$

IV. SISTEMAS NO LINEALES



IV.1 FUNCIÓN DESCRIPTIVA

1. Encuentre la función descriptiva de la alinealidad de conexión-desconexión (on – off).

La alinealidad de conexión-desconexión, frecuentemente se denomina alinealidad de dos posiciones

Sea un elemento sí-no, cuya curva característica de entrada sea la que se ve en la Fig.1.

La salida de este elemento es, o bien una constante positiva o una constante negativa. La Fig.2 muestra las formas de onda de entrada y salida.

Fig. 1

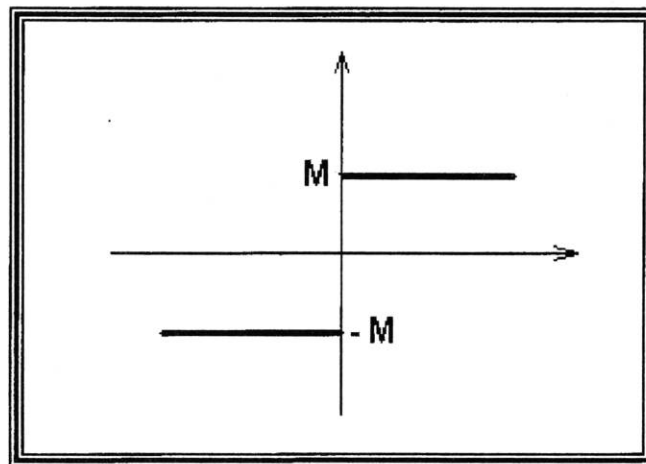
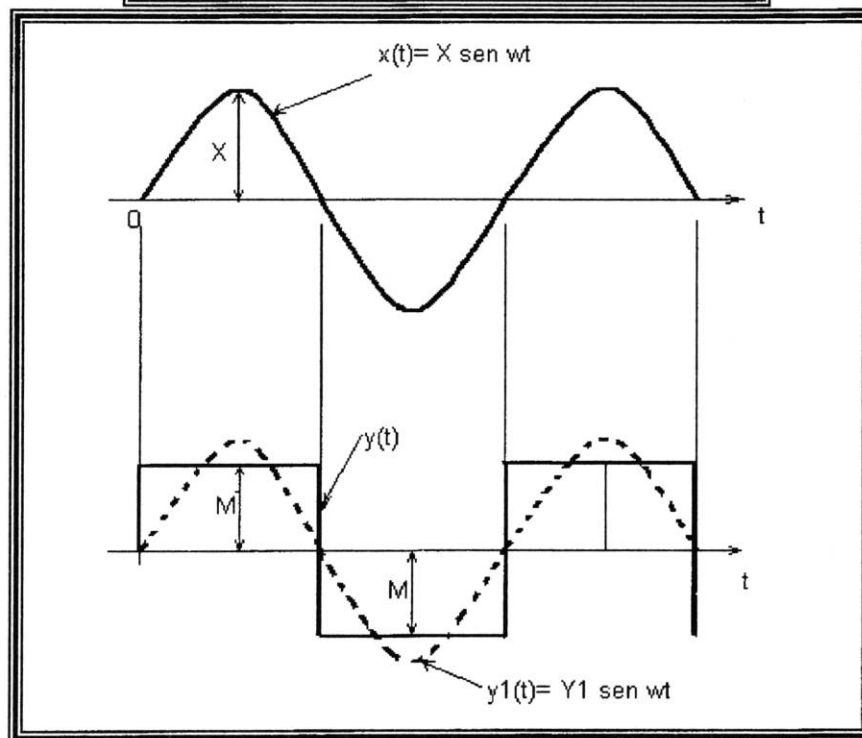


Fig.2



Se obtiene el desarrollo en Serie de Fourier de la salida $y(t)$ de este elemento.

$$y(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sen n\omega t).$$

Encontrando los coeficientes:

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^{2\pi} y(t) \cos n\omega t \, d(\omega t).$$

Para $n=0$:

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} M \cos 0\omega t \, d(\omega t).$$

Como $\cos 0 = 1$:

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} M \, d(\omega t).$$

Desarrollando tenemos:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} M \, dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} -M \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} (M(\pi-0) - M(2\pi - \pi)) \\ &= \frac{1}{\pi} (M\pi - 2M\pi + M\pi) \\ A_0 &= 0. \end{aligned}$$

PARA $n = 1$.

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos 1\omega t \, d(\omega t) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} M \cos \omega t \, d(\omega t) + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} -M \cos \omega t \, d(\omega t) \\ &= \frac{M}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \omega t \, d(\omega t) - \frac{M}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \cos \omega t \, d(\omega t) \end{aligned}$$

Desarrollando las integrales:

$$\int_0^{\pi} \cos \omega t \, d(\omega t) = \sen \omega t \Big|_0^{\pi} = \sen(\pi - 0) = \sen \pi$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \cos \omega t d(\omega t) = \left. \sin \omega t \right|_{\pi}^{2\pi} = \sin (2\pi - \pi) = \sin \pi$$

Entonces:

$$A_1 = \frac{M}{\pi} \sin \pi - \frac{M}{\pi} \sin \pi$$

Pero como :

$$\sin \pi = 0$$

Entonces:

$$A_1 = 0$$

Encontrando ahora los coeficientes B_n :

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^{2\pi} y(t) \sin (n\omega_0 t) d(\omega t)$$

Para $n=0$:

$$B_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin 0\omega t d(\omega t)$$

Como $\sin 0 = 0$ entonces:

$$B_0 = 0$$

Para $n=1$

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin \omega t d(\omega t) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} M \sin \omega t d(\omega t) + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} -M \sin \omega t d(\omega t) \\ &= \frac{M}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \omega t d(\omega t) - \frac{M}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \sin \omega t d(\omega t) \end{aligned}$$

Desarrollando las integrales:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin \omega t d(\omega t) &= -\cos \pi + \cos 0 \\ \int_{\pi}^{2\pi} \sin \omega t d(\omega t) &= -\cos 2\pi + \cos \pi \end{aligned}$$

Pero como:

$$\begin{aligned} \cos 0 &= 1 \\ \cos \pi &= -1 \\ \cos 2\pi &= 1 \end{aligned}$$

Entonces:

$$B_1 = \frac{M}{\pi} (- \cos \pi + \cos 0) - \frac{M}{\pi} (- \cos 2\pi + \cos \pi)$$

$$B_1 = \frac{M}{\pi} (1 + 1) - \frac{M}{\pi} (-1 - 1)$$

$$B_1 = \frac{2M}{\pi} + \frac{2M}{\pi}$$

$$B_1 = \frac{4M}{\pi}$$

Llegando así a la Serie de Fourier:

$$y(t) = B_1 \sin \omega t$$

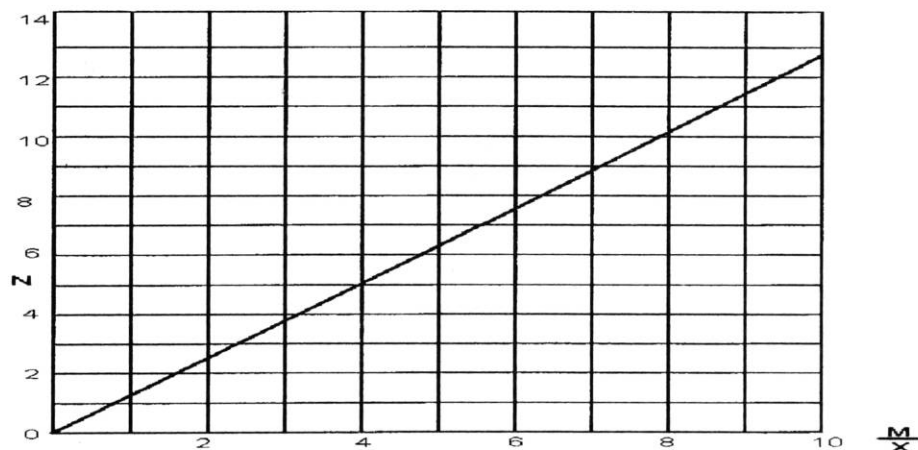
$$= \frac{4M}{\pi} \sin \omega t$$

Entonces la función descriptiva N queda dada por:

$$N = \frac{4M/\pi}{X} \angle 0^\circ$$

$$N = \frac{4M}{\pi X} \angle 0^\circ$$

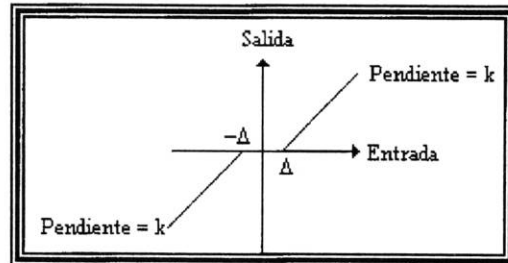
$$N(X) = \frac{4M}{\pi X}$$



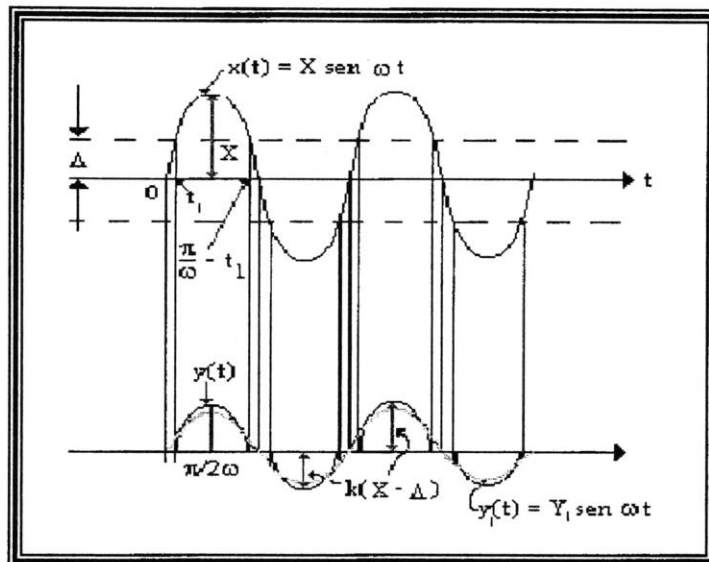
Función descriptiva para la alinealidad conexión – Desconexión o S í – No

2. Encuentre la función descriptiva de la alinealidad zona muerta

Este elemento no lineal recibe a veces el nombre de no linealidad de umbral. La zona muerta puede causar error en estado permanente. En la siguiente figura se muestra una curva característica de entrada-salida:



Para una entrada senoidal, la forma de onda de la salida está representada de la siguiente manera:



Para el elemento con zona muerta que se muestra en la primera figura, la salida $y(t)$ para $0 \leq \omega t \leq \pi$ está dada por:

$$\begin{aligned} y(t) &= 0 & \text{para } 0 < t < t_1 \\ y(t) &= k(X \sin \omega t - \Delta) & \text{para } t_1 < t < (\omega / \pi) - t_1 \\ y(t) &= 0 & \text{para } (\omega / \pi) - t_1 < t < (\omega / \pi) \end{aligned}$$

Se obtiene el desarrollo en Serie de Fourier de la salida $y(t)$ de este elemento:

$$Y(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t$$

Encontrando los coeficientes de Fourier observamos que la salida $y(t)$ se encuentra como una función par. Y por trimestres anteriores la expansión en Serie de Fourier solo tiene términos senos. Por lo que A_0 , A_1 y B_0 son cero. Entonces nos queda:

$$Y(t) = B_1 \sin \omega t, \text{ encontrando } B_1:$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin \omega t d(\omega t)$$

Usando una de las propiedades de simetría de onda simplificamos:

$$B_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} y(t) \sin \omega t d(\omega t)$$

Sustituyendo el valor de $y(t)$:

$$B_1 = \frac{4}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\pi/2} K(X \sin \omega t - \Delta) \sin \omega t d(\omega t)$$

$$B_1 = \frac{4K}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\pi/2} (X \sin \omega t - \Delta) \sin \omega t d(\omega t)$$

Vemos que:

$$\Delta = X \sin \omega t_1$$

$$\omega t_1 = \sin^{-1} \left(\frac{\Delta}{X} \right)$$

Entonces:

$$B_1 = \frac{4K}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\pi/2} (X \sin \omega t \sin \omega t d(\omega t) - X \sin \omega t_1 \sin \omega t d(\omega t))$$

$$B_1 = \frac{4XK}{\pi} \left[\int_{\omega t_1}^{\pi/2} \sin^2 \omega t d(\omega t) - \sin \omega t_1 \int_{\omega t_1}^{\pi/2} \sin \omega t d(\omega t) \right]$$

Por las fórmulas siguientes:

$$\int \sin^2 u \, du = \frac{1}{2} u - \frac{1}{4} \sin 2u + c$$

$$\int \sin u \, du = -\cos u + c$$

Desarrollando:

$$B_1 = \frac{4XK}{\pi} \left[\frac{1}{2} \omega t - \frac{1}{4} \sin 2 \omega t - \sin \omega t_1 [-\cos \omega t] \right]$$

Sustituyendo los valores de las integrales:

$$B_1 = \frac{4XK}{\pi} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2(\pi/2) - (1/2)\omega t_1 + (1/4)\sin 2\omega t_1 + \sin \omega t_1 \cdot [\cos (\pi/2) - \cos \omega t_1] \right]$$

$$B_1 = \frac{4XK}{\pi} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \sin \pi - \frac{1}{2} \omega t_1 + \frac{1}{4} \sin 2\omega t_1 + \sin \omega t_1 \cos \frac{\pi}{2} - \sin \omega t_1 \cdot \cos \omega t_1 \right]$$

Como $\sin \pi = 0$
 $\cos \pi/2 = 0$

Entonces queda la ecuación:

$$B_1 = \frac{4XK}{\pi} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \omega t_1 + \frac{1}{4} \sin 2\omega t_1 - \sin \omega t_1 \cos \omega t_1 \right]$$

Como $\Delta = X \sin \omega t_1$
 $\omega t_1 = \sin^{-1} \left(\frac{\Delta}{X} \right)$

$$B_1 = \frac{4XK}{\pi} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{\Delta}{X} \right) + \frac{1}{4} \sin 2\omega t_1 - \sin \omega t_1 \cos \omega t_1 \right]$$

Desarrollando más tenemos:

$$B_1 = \frac{2XK}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{\Delta}{X} \right) - \frac{\Delta}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{X} \right)^2} \right]$$

La función descriptiva para un elemento con zona muerta se puede obtener como.

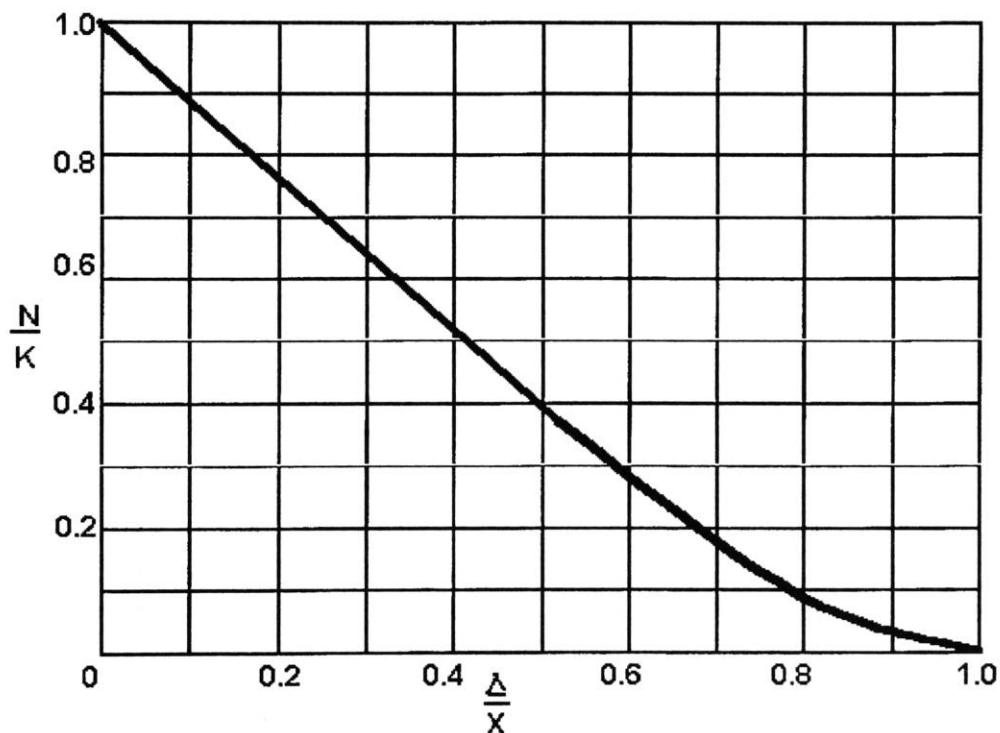
$$N = \frac{B_1}{X} \angle 0^\circ$$

Sustituyendo los valores obtenidos anteriormente llegamos:

$$N = \frac{2K}{\pi} \left[\sin^{-1} \left(\frac{\Delta}{X} \right) + \frac{\Delta}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{X} \right)^2} \right]$$

La siguiente figura presenta la gráfica de N/K como función de Δ/X . Nótese que para $(\Delta/X) > 1$ la salida es cero y el valor de la función descriptiva también es cero.

3. Encuentre la función descriptiva de la combinación de Zona-Muerta y Saturación



Encontrar la función descriptiva o generalizada de la no linealidad siguiente: Combinación de Zona muerta y saturación.

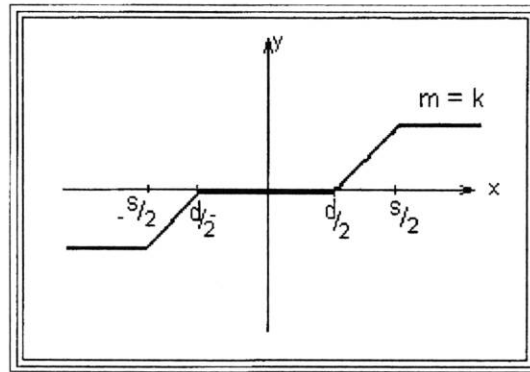


figura 1. Zona muerta y saturación

La presencia simultánea de zona muerta y saturación se indica en la figura 1. La salida depende del valor de la entrada X . Para $X > S/2$ la salida se indica en la figura 2.

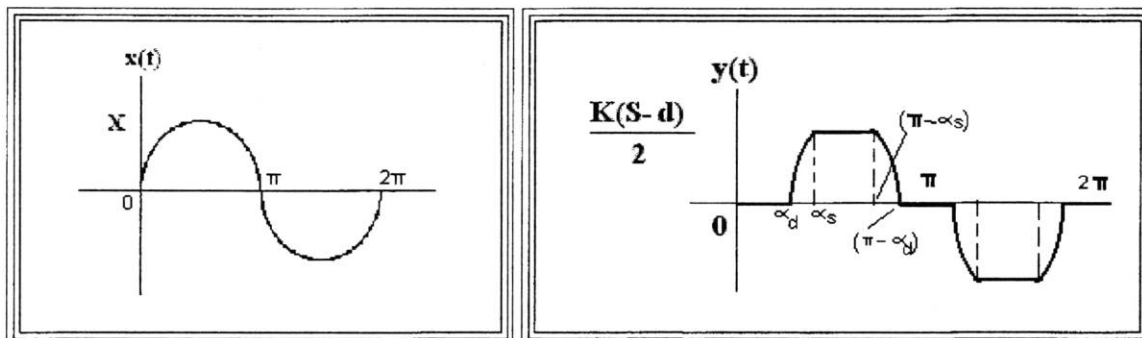


Figura 2. Entrada y salida con zona muerta y saturación

Sabemos que la función descriptiva se define como el cociente del fasor representativo de la componente fundamental de la salida de la no linealidad y el fasor representativo de su entrada senoidal. Esto es:

$$N(j\omega) = \frac{Y_1(j\omega)}{X(j\omega)}$$

Donde:

$N(j\omega)$ = Función Descriptiva

$Y_1(j\omega)$ = Componente fundamental de la salida, determinado por un análisis de Fourier.

$X(j\omega)$ = señal senoidal de entrada $x = X \sin(j\omega)$

Según observamos en $Y_1(j\omega)$ debemos calcular la serie de Fourier de la salida de la forma:

$$y(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t)$$

en donde:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos(n\omega t) d\omega t$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin(n\omega t) d\omega t$$

Dado que la no linealidad es simétrica $\frac{A_0}{2} = 0$ y dado que la no linealidad también tiene simetría de media onda $A_n = 0$. Por lo tanto solo es necesario calcular B_n integrando de 0 a $\pi/2$ y multiplicando el resultado por cuatro. Entonces los armónicos de $y(t)$ están dados por:

$$\begin{aligned} Y_K &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} y(t) \sin k\omega t d\omega t \\ &= \frac{4}{\pi} \left[\int_{\alpha d}^{\alpha s} K \left(X \sin \omega t - \frac{d}{2} \right) \sin k\omega t d(\omega t) + \int_{\alpha s}^{\pi/2} K \left(\frac{S-d}{2} \right) \sin k\omega t d(\omega t) \right] \\ &= \frac{4}{\pi} \int_{\alpha d}^{\alpha s} KX \sin \omega t \sin k\omega t d(\omega t) - \frac{4}{\pi} \int_{\alpha d}^{\alpha s} Kd/2 \sin k\omega t d(\omega t) + \frac{1}{2} \int_{\alpha s}^{\pi/2} KS \sin k\omega t d(\omega t) - \\ &\quad \frac{1}{2} \int_{\alpha s}^{\pi/2} Kd \sin k\omega t d(\omega t) \\ &= \frac{4KX}{\pi} \left[\frac{\sin(K-1)\alpha s}{2(K-1)} - \frac{\sin(K-1)\alpha d}{2(K-1)} + \frac{\sin(K+1)\alpha s}{2(K+1)} - \frac{\sin(K+1)\alpha d}{2(K+1)} + \frac{2d}{\pi} (\cos k\alpha s - \cos k\alpha d) \right] + \\ &\quad + \frac{s-d}{2} \left(-\cos \frac{k\pi}{2} + \cos k\alpha s \right) \end{aligned}$$

El valor máximo que se les puede adecuar a αd y αs es $\pi/2$, implica que:

$$\cos k\alpha d = 0$$

$$\cos k\alpha s = 0$$

$$\cos \frac{k\pi}{2} = 0$$

Dando como resultado

$$Y_K = \frac{2KX}{k\pi} \left[\frac{\sin(K-1)\alpha s}{K-1} - \frac{\sin(K-1)\alpha d}{K-1} + \frac{\sin(K+1)\alpha s}{K+1} - \frac{\sin(K+1)\alpha d}{K+1} \right]$$

Los casos de zona muerta o saturación individuales pueden obtenerse de la ecuación anterior sustituyendo $\alpha s = \pi/2$ o $\alpha d = 0$, respectivamente.

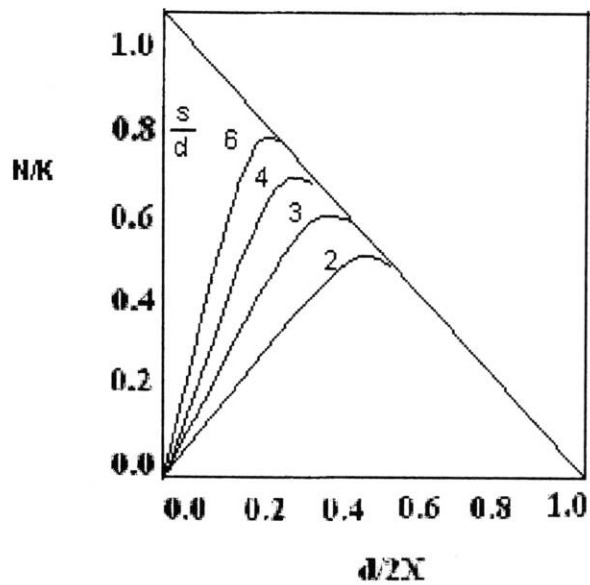
Para obtener la fundamental empleamos la regla de L'Hopital es decir eliminamos la indeterminación 0/0 derivando arriba y abajo la expresión con respecto a k y obtenemos:

$$Y_1 = \frac{2KX}{\pi} \left[\alpha s - \alpha d + \frac{\sin 2\alpha s}{2} - \frac{\sin 2\alpha d}{2} \right]$$

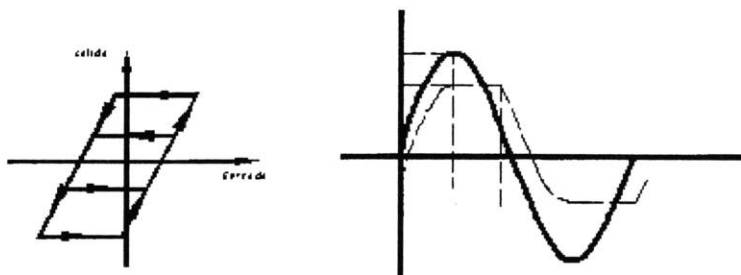
Por lo tanto la función descriptiva adimensional es:

$$\frac{N}{K} = \frac{Y_1}{KX} = \left[\frac{2\alpha s}{\pi} - \frac{2\alpha d}{\pi} + \frac{\sin 2\alpha s}{2} + \frac{\sin 2\alpha d}{2} \right]$$

El trazado de esta función depende de los valores relativos de αs y αd . El valor máximo que puede darse a αs y αd en esta ecuación es $\pi/2$. En la figura se da una familia de curvas en función de $d/2X$ para distintos valores de S/d . Para $d=S$ el valor de la función descriptiva es cero para todas las otras entradas. Para $d/2X > 1$ el valor de la función descriptiva es cero. De la misma forma, cuando X se hace muy grande la función generalizada se aproxima a cero.



4. Encuentre la función descriptiva de la alinealidad carrera muerta (backlash)



Entrada :

$$x = X_m \sin \omega t$$

Salida :

$$y = X_m \sin \omega t - \frac{b}{2}$$

$$0 \leq \omega t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$y = X_m - \frac{b}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \omega t \leq \pi - \alpha$$

$$y = X_m \sin \omega t + \frac{b}{2}$$

$$\pi - \alpha \leq \omega t \leq \pi$$

donde :

$$\alpha = \sin^{-1} \frac{(X_m - b)}{b} \quad (1)$$

Así:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(X_m \sin \omega t - \frac{b}{2} \right) \cos \omega t d(\omega t) \\
&+ \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi-\alpha} \left(X_m - \frac{b}{2} \right) \cos \omega t d(\omega t) \\
&+ \frac{2}{\pi} \int_{\pi-\alpha}^{\pi} \left(X_m \sin \omega t + \frac{b}{2} \right) \cos \omega t d(\omega t)
\end{aligned}$$

Desarrollando la primera integral

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[X_m \sin \omega t \cos \omega t - \frac{b}{2} \cos \omega t \right] d(\omega t) &= \frac{2}{\pi} \left[X_m \int_0^{\pi/2} \sin \omega t \cos \omega t d(\omega t) - \frac{b}{2} \int_0^{\pi/2} \cos \omega t d(\omega t) \right] \\
&= \frac{2}{\pi} \left[X_m \sin^2 \omega t \Big|_0^{\pi/2} - \frac{b}{2} \sin \omega t \Big|_0^{\pi/2} \right] = \frac{2}{\pi} \left[X_m \left(\sin^2 \frac{\pi}{2} - \sin^2 0 \right) \right] - \frac{2}{\pi} \left[\frac{b}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) \right] \\
&= \frac{2}{\pi} X_m - \frac{2}{\pi} \left(\frac{b}{2} \right) = \frac{2}{\pi} \left(X_m - \frac{b}{2} \right).
\end{aligned}$$

Para la segunda integral.

$$\frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi-\alpha} \left(X_m - \frac{b}{2} \right) \cos \omega t d(\omega t) = \frac{2}{\pi} \left(X_m - \frac{b}{2} \right) \sin \omega t \Big|_{\pi/2}^{\pi-\alpha} = \frac{2}{\pi} \left(X_m - \frac{b}{2} \right) (\sin(\pi - \alpha) - 1).$$

Pero sabemos que.

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b.$$

Luego.

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \pi \cos \alpha - \cos \pi \sin \alpha = -\sin \alpha = -\sin \left(\sin^{-1} \frac{X_m - b}{b} \right) = \frac{b - X_m}{b}.$$

Entonces la integral queda.

$$\frac{2}{\pi} \left(X_m - \frac{b}{2} \right) \left(\frac{b - X_m}{b} \right) - \frac{2}{\pi} \left(X_m - \frac{b}{2} \right) = \frac{2}{\pi} \left(X_m - \frac{b}{2} \right) \left(\frac{b - X_m}{b} - 1 \right).$$

Realizamos la tercera integral.

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi} \int_{\pi-\alpha}^{\pi} \left(X_m \sin \omega t + \frac{b}{2} \right) \cos \omega t d(\omega t) &= \frac{2}{\pi} \left[\int_{\pi-\alpha}^{\pi} X_m \sin \omega t \cos \omega t d(\omega t) + \frac{b}{2} \int_{\pi-\alpha}^{\pi} \cos \omega t d(\omega t) \right] \\
&= \frac{2}{\pi} \left[X_m \sin^2 \omega t \Big|_{\pi-\alpha}^{\pi} + \frac{b}{2} \sin \omega t \Big|_{\pi-\alpha}^{\pi} \right] = \frac{2}{\pi} \left[X_m (\sin^2 \pi - \sin^2 (\pi - \alpha)) + \frac{b}{2} (\sin \pi - \sin (\pi - \alpha)) \right] \\
&= \frac{2}{\pi} \left[-X_m \sin^2 (\pi - \alpha) - \frac{b}{2} \sin (\pi - \alpha) \right] = \frac{2}{\pi} \left[-X_m \left(\frac{X_m - b}{b} \right)^2 + \frac{b}{2} \left(\frac{X_m - b}{b} \right) \right].
\end{aligned}$$

La integral total queda de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\pi} \left(X_m - \frac{b}{2} \right) + \frac{2}{\pi} \left(X_m - \frac{b}{2} \right) \left(\frac{b - X_m}{b} - 1 \right) + \frac{2}{\pi} \frac{b}{2} \left(\frac{X_m - b}{b} \right) - X_m \left(\frac{X_m - b}{b} \right)^2 \\
&= \left(\frac{2}{\pi} X_m - \frac{2}{\pi} \frac{b}{2} \right) \left(\frac{b - X_m}{b} \right) + \frac{2}{\pi} \frac{b}{2} \left(\frac{X_m - b}{b} \right) - X_m \left(\frac{X_m - b}{b} \right)^2 \\
&= \left(\frac{2}{\pi} X_m \right) \left(\frac{b - X_m}{b} \right) + \frac{2}{\pi} (X_m - b) - X_m \left(\frac{X_m - b}{b} \right)^2 = \frac{2(X_m - b)}{\pi} \left(1 - \frac{X_m}{b} \right) - X_m \left(\frac{X_m - b}{b} \right)^2 \\
&= \frac{2}{\pi} (X_m - b) \left(\frac{b - X_m}{b} \right) - X_m \left(\frac{X_m - b}{b} \right)^2 = \frac{2}{b\pi} (X_m - b)^2 - X_m \left(\frac{X_m - b}{b} \right)^2 = \frac{2}{b\pi} (X_m - b)^2 - \frac{X_m}{b^2} (X_m - b)^2 \\
&= (X_m - b)^2 \left(\frac{2}{b\pi} - \frac{X_m}{b^2} \right).
\end{aligned}$$

Similarmente, la componente fundamental del seno es:

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(X_m \sin \omega t - \frac{b}{2} \right) \sin \omega t d(\omega t) \\
&+ \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\alpha} \left(X_m - \frac{b}{2} \right) \sin \omega t d(\omega t) \\
&+ \frac{2}{\pi} \int_{\pi-\alpha}^{\pi} \left(X_m \sin \omega t + \frac{b}{2} \right) \sin \omega t d(\omega t) \\
B_1 &= \frac{X_m}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \alpha + \frac{b(X_m - b)}{X_m^2} \sqrt{\frac{2X_m}{b} - 1} \right] \quad (3)
\end{aligned}$$

La función descriptiva para un elemento dado para las componentes fundamentales seno y coseno es:

$$N_1 = \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{X_m} \left\langle \tan^{-1} \frac{A_1}{B_1} \right\rangle$$

Esto, combinando las ecuaciones (1), (2) y (3) obtenemos:

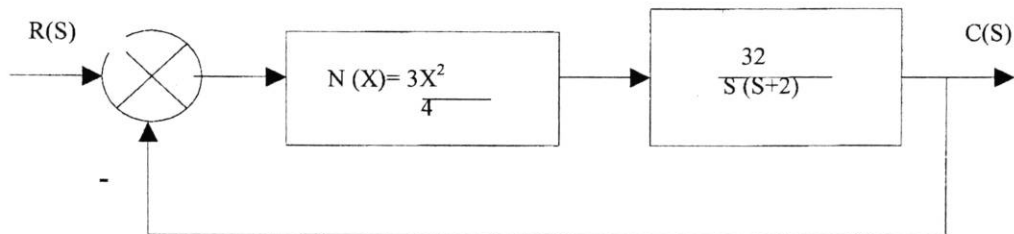
$$|N_1| = \frac{1}{\pi} \left\{ \left[\frac{\pi}{2} + \sin^{-1} \left(1 - \frac{b}{X_m} \right) \right]^2 + \frac{2b}{X_m} \left(1 - \frac{b}{2X_m} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ + \left[\pi + 2 \sin^{-1} \left(1 - \frac{b}{X_m} \right) \right] \frac{b}{X_m} \left(1 - \frac{b}{X_m} \right) \sqrt{1 - \frac{1}{b/2X_m}}$$

y

$$N_1 = \tan^{-1} \frac{\left(\frac{2b}{X_m} \right) \left(\frac{b}{2X_m} - 1 \right)}{\frac{\pi}{2} + \sin^{-1} \left(1 - \frac{b}{X_m} \right) + \frac{b}{X_m} \left(1 - \frac{b}{X_m} \right) \sqrt{1 - \frac{1}{b/2X_m}}}$$

IV.2 ANÁLISIS CON LA FUNCIÓN DESCRIPTIVA

5. Determine la amplitud A y la frecuencia w para las cuales podrían mantenerse las oscilaciones en el sistema:



$$G(w) = \frac{32}{jw(jw+2)^2} \quad \text{sistema lineal}$$

$$N(x) = \frac{3x^2}{4} \quad \text{sistema no lineal}$$

$$G(w) = \frac{32}{jw((jw)^2 + 4jw + 4)} = \frac{32}{jw(-w^2 + 4jw + 4)} = \frac{32}{-jw^3 - 4w^2 + 4jw} = \frac{32}{-4w^2 - jw(w^2 - 4)}$$

$$G(w) = \frac{32(-4w^2 + jw(w^2 - 4))}{(-4w^2)^2 + w^2(w^2 - 4)^2} = \frac{-128w^2}{16w^4 + w^2(w^2 - 4)^2} + j \frac{32w(w^2 - 4)}{16w^4 + w^2(w^2 - 4)^2}$$

$$G(w) = \frac{-128w^2}{w^2[6w^2 + (w^2 - 4)^2]} + j \frac{32w(w^2 - 4)}{w[6w^3 + w(w^2 - 4)^2]} = \frac{-128}{16w^2 + (w^2 - 4)^2} + j \frac{32(w^2 - 4)}{16w^3 + w(w^2 - 4)^2}$$

$$\therefore 32(w^2 - 4) = 0 \rightarrow w^2 = 4 \Rightarrow w = \pm\sqrt{4}$$

luego $\rightarrow w = \pm 2 \text{ rad / seg}$

Se sustituye este valor en la fórmula de magnitud de la Función de Transferencia de $G(w)$:

$$G(w) = \frac{32}{jw(jw+2)^2}$$

$$|G(w)| = \frac{32}{w\sqrt{w^2 + 4}\sqrt{w^2 + 4}}$$

$$|G(2)| = \frac{32}{2\sqrt{2^2 + 4}\sqrt{2^2 + 4}} = \frac{32}{2\sqrt{8}\sqrt{8}} = \frac{32}{16} = 2$$

$$|G(2)| = 2$$

que es la magnitud que tienen tanto $G(\omega)$ como $-1/N(x)$ para esa frecuencia.

W	$ G(jw)_{db}$	ϕ	$ G(jw)$
0.2	24	-100°	15.84
0.6	14	-126°	5
1.0	8	-145°	2.5
1.4	3	-160°	1.4
1.8	-1	-172°	0.9
2.0	-3	-180°	0.7
2.4	-6	-190°	0.5
2.8	-9	-198°	0.3
5.0	-22	-225°	0.08
8.0	-33	-243°	0.02

Como

$$N(x) = \frac{2}{\pi} \left[\sin^{-1} \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cos \sin^{-1} \frac{1}{x} \right]$$

$$-\frac{1}{N(x)} = -\frac{\pi}{2 \left[\sin^{-1} \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cos \sin^{-1} \frac{1}{x} \right]}$$

se sustituye el valor de la magnitud hallada:

$$+2 = +\frac{\pi}{2 \left[\sin^{-1} \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cos \sin^{-1} \frac{1}{x} \right]}$$

$$4 \left[\sin^{-1} \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cos \sin^{-1} \frac{1}{x} \right] = \pi$$

$$\sin^{-1} \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cos \sin^{-1} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{4}$$

haciendo: $\mu = \sin^{-1} \frac{1}{x}$ se tiene: $\sin \mu = \frac{1}{x}$ así tenemos: $\mu + \sin \cos \mu = \frac{\pi}{4}$

luego:

$$\mu + \frac{\sin 2\mu}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$2\mu + \sin 2\mu = \frac{\pi}{2}$$

calculando por tanteo tenemos que: $\mu = 0.41$ aproximadamente

como: $\mu = \sin^{-1} \frac{1}{x} \rightarrow$

$$\frac{1}{x} = \sin \mu$$

$$\frac{1}{x} = \sin 0.41$$

$$\frac{1}{x} = 0.4$$

$$x = 2.5$$

Con $f(s) = e^3$ y $G(w) = \frac{1}{(jw+1)^3}$

Luego entonces:

$$G(w) = \frac{1}{(s+1)^3} = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} = \frac{1}{(s+1)(s+1)(s+1)}$$

$$G(w) = \frac{1}{(jw+1)(jw+1)(jw+1)} = \frac{1}{(jw+1)^3} = \frac{1}{(jw)^3 + 3(jw)^2 + 3(jw) + 1}$$

$$G(w) = \frac{1}{-jw^3 - 3w^2 + 3w + 1} = \frac{1}{(1-3w^2) + jw(3-w^2)}$$

$$G(w) = \frac{(1-3w^2) - jw(3-w^2)}{(1-3w^2)^2 + (w(3-w^2))^2} = \frac{(1-3w^2)}{(1-3w^2)^2 + w^2(3-w^2)^2}$$

$$G(w) = \frac{(1-3w^2)}{(1-3w^2)^2 + w^2(3-w^2)^2} - j \frac{w(3-w^2)}{(1-3w^2)^2 + w^2(3-w^2)^2}$$

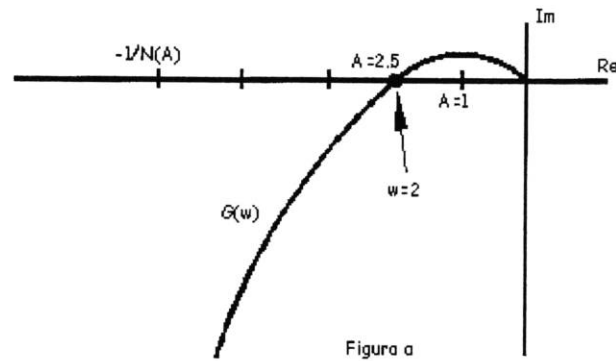
luego: $w(3-w^2) = 0 \Rightarrow w_1 = 0 \quad y \quad 3-w^2 = 0$

$3 = w^2$ así: $\pm \sqrt{3} \text{ rad/seg} = w$

así entonces frecuencia ciclo límite $= w = \pm \sqrt{3} \text{ rad/seg}$

luego:

w	$ G(jw) _{\text{db}}$	ϕ	$ G(jw) $
0.2	-0.5	-35°	0.94
0.4	-2	-63°	0.79
0.6	-4	-92°	0.63
0.8	-7	-112°	0.44
1.0	-9	-135°	0.35
1.2	-12	-148°	0.25
1.4	-14	-162°	0.20
1.6	-16	-174°	0.16
1.7	-17	-180°	0.14
1.8	-18	-182°	0.12
2.0	-20	-190°	0.10
4.0	-37	-225°	0.01
6.0	-46	-241°	0.005
8.0	-54	-250°	0.002
10.0	-60	-252°	0.001



Los dos lugares se cortan en $A = 2.5$ y $\omega = 2$, que son las condiciones de oscilación.

$$|G(\sqrt{3})| = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} \cdot \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} \cdot \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1}}$$

$$|G(\sqrt{3})| = \frac{1}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{4}} = \frac{1}{8} = 0.125$$

a esta frecuencia ($\omega = \sqrt{3}$) se tiene una magnitud igual a 0.125 que es la magnitud tanto para $G(s)$ como para $-\frac{1}{N(x)}$ luego así tenemos que:

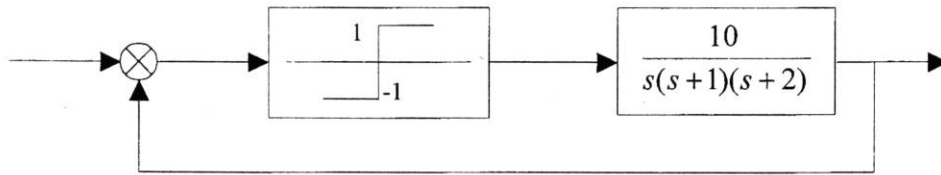
$$-\frac{1}{N(x)} = -\frac{4}{3x^2} \Rightarrow 0.125 = \frac{4}{3x^2} \rightarrow 0.375x^2 = 4$$

$$x^2 = 10.66666 \rightarrow x = \pm \sqrt{10.66666}$$

$$x = \pm 3.2659 \quad (\text{amplitud})$$

para $x > 3.2659$ el sistema es estable por el criterio de Loeb

6. Para el siguiente sistema, determinar la amplitud y frecuencia del ciclo límite.



Tenemos que $G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+2)}$; sustituyendo $s = j\omega$ en la función $G(s)$, para encontrar la parte real e imaginaria de la función, nos da lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 G(j\omega) &= \frac{10}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)} = \frac{10}{(j^2\omega^2 + j\omega)(j\omega+2)} = \frac{10}{(-\omega^2 + j\omega)(j\omega+2)} = \frac{10}{-j\omega - 2\omega^2 + j^2\omega^2 + 2j\omega} \\
 &= \frac{10}{-3\omega^2 + 2j\omega - j\omega^3} = \frac{10}{-3\omega^2 + j\omega(2-\omega^2)} \cdot \frac{[-3\omega^2 - j\omega(2-\omega^2)]}{[-3\omega^2 - j\omega(2-\omega^2)]} = \frac{-30\omega^2 - 10j\omega(2-\omega^2)}{(3\omega^2)^2 + [\omega(2-\omega^2)]^2} = \\
 &= \frac{-30\omega^2 - 10j\omega(2-\omega^2)}{9\omega^4 + \omega^2(2-\omega^2)^2} = \frac{-30\omega^2}{9\omega^4 + \omega^2(2-\omega^2)^2} + \frac{10j\omega(2-\omega^2)}{9\omega^4 + \omega^2(2-\omega^2)^2} = \\
 &= \frac{-30\omega^2}{\omega^2[9\omega^2 + (2-\omega^2)^2]} - \frac{10j\omega(2-\omega^2)}{\omega[9\omega^3 + \omega(2-\omega^2)^2]} = \frac{-30}{9\omega^2 + (2-\omega^2)^2} - \frac{10j(2-\omega^2)}{9\omega^3 + \omega(2-\omega^2)^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{entonces si } s=j\omega, G(s)=\text{Re}G(s)+j\text{Im}G(s) = \frac{-30}{9\omega^2 + (2-\omega^2)^2} - \frac{10j(2-\omega^2)}{9\omega^3 + \omega(2-\omega^2)^2}$$

De este resultado, si $\text{Im}G(s)=0$, entonces tenemos:

$$\text{Im}[G(j\omega)]=0 \Leftrightarrow 10(2-\omega^2)=0 \Leftrightarrow \omega^2=2 \Rightarrow \omega=1.4142$$

Evaluando $G(j\omega)$ para diferentes valores de ω y graficando los resultados obtenidos en un plano de Nyquist, tenemos:

$$\text{Si } \omega=0 \Rightarrow G(s) = \frac{-30}{9(0) + (2-0)^2} - j \frac{10(2-0)}{9(0) + 0(2-0)^2} = -7.5 - j\infty$$

$$\text{Si } \omega=1 \Rightarrow G(j) = \frac{-30}{9(1) + (2-1)^2} - j \frac{10(2-1)}{9(1) + 1(2-1)^2} = \frac{-30}{10} - j = -3 - j$$

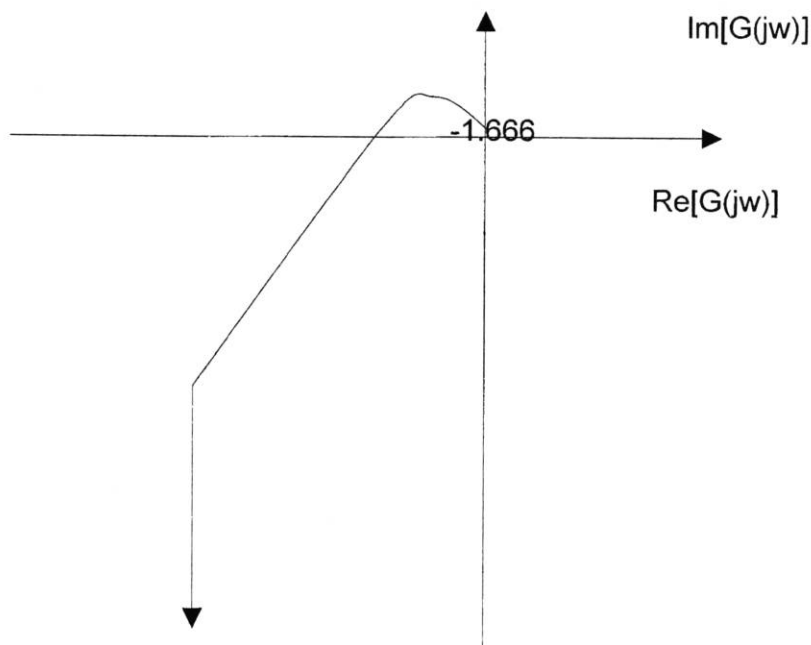
$$\text{Si } \omega=0.5 \Rightarrow G(j0.5) = -5.647 - j6.588$$

Si $\omega = \sqrt{2} = 1.4142$, sabemos que en este caso no existe parte imaginaria, ya que se hace cero (como se muestra en los cálculos realizados con anterioridad), por lo tanto:

$$G(j\sqrt{2}) = -1.666$$

$$\text{Si } \omega=2, G(j2) = -0.75 + j0.25$$

Utilizando los puntos encontrados bosquejamos el diagrama de Nyquist para la función $G(j\omega)$.



Sabemos que $N = \frac{4M}{\pi X}$ es la **función descriptiva para un elemento si-no.** donde $M = 1$, por lo tanto $N = \frac{4}{\pi X}$

De lo anterior, realizamos $\frac{1}{N} = \frac{\pi X}{4}$ puesto que $\frac{1}{N} \ni \mathbb{R}$, y considerando únicamente números negativos $\left(\frac{1}{N} < 0\right)$, tenemos que $-\frac{1}{N} > 0$, entonces $-\frac{1}{N} = \frac{\pi X}{4}$.

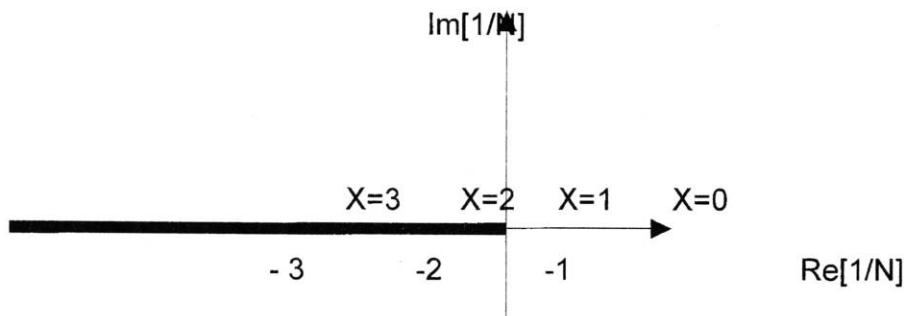
Dando valores a X obtenemos el diagrama de Nyquist para $\frac{1}{N}$

$$\text{Si } X=0 \Rightarrow \frac{1}{N} = 0$$

$$\text{Si } X=1 \Rightarrow \frac{1}{N} = -\frac{\pi}{4} = -0.7853$$

$$\text{Si } X=2 \Rightarrow \frac{1}{N} = -\frac{2\pi}{4} = -1.570$$

$$\text{Si } X=3 \Rightarrow \frac{1}{N} = -\frac{3\pi}{4} = -2.356$$



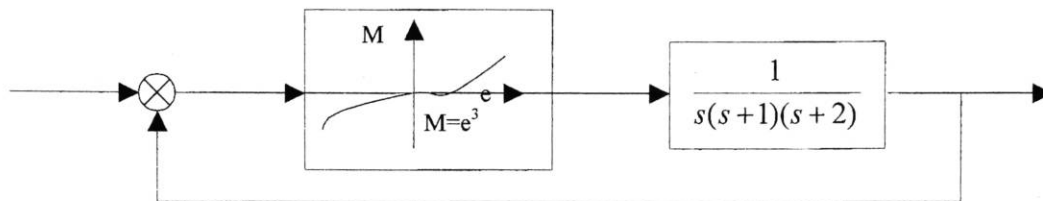
Con esto, tenemos entonces que $G(j\omega) = -\frac{1}{N}$ la salida del sistema presenta un ciclo límite así la intersección de $G(j\omega)$ y $-\frac{1}{N}$ nos dan la amplitud y la frecuencia del ciclo límite.

Es fácil notar que al superponer los dos diagramas anteriores, la intersección de estos, se encuentra en el punto $-1.666+j0$, y es que este punto es el único en donde el diagrama de Nyquist para la función $G(j\omega)$ cruza el eje real negativo. Además también podemos darnos cuenta de que la frecuencia que se ubica en esta coordenada es igual a $\omega = \sqrt{2}$, que es la frecuencia que buscamos.
 $\omega = 1.414 \text{ rad / seg.}$

Para X tenemos:

$$\frac{1}{N} = -\frac{\pi X}{4} = -1.6666 \Rightarrow X = \frac{-1.666(4)}{-\pi} = 2.121 \therefore X = 2.121 \text{ que es la amplitud buscada.}$$

7. Determinar el ciclo límite del sistema que se muestra en la siguiente figura.



Sabemos que el desarrollo de la serie de Fourier para una función es el siguiente:

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega)t + B_n \sin(n\omega)t]$$

Considerando a $y(t)=e^3$ como la salida, notamos que es una función impar, por lo cual $A_0 = A_n = 0$, así

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\omega)t$$

Ahora bien, la componente de armónica fundamental es: $y_1(t) = B_1 \sin(\omega)t$, pero

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin(n\omega)t dt \text{ si } n = 1, \text{ tenemos}$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin \omega t d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^3 \sin \omega t dt \text{ Pero } e \text{ es un número que viene dado } e=2.71828$$

(aproximadamente) así: $e^3 = \text{constante} = (2.71828)^3$

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \left[- \int_{-\pi}^0 e^3 \sin \omega t d(\omega t) + \int_0^{\pi} e^3 \sin \omega t d(\omega t) \right] = \frac{2}{\pi} e^3 \int_0^{\pi} \sin \omega t d(\omega t) = \frac{2}{\pi} e^3 [-\cos \omega t]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} e^3 (2) = \frac{4}{\pi} e^3$$

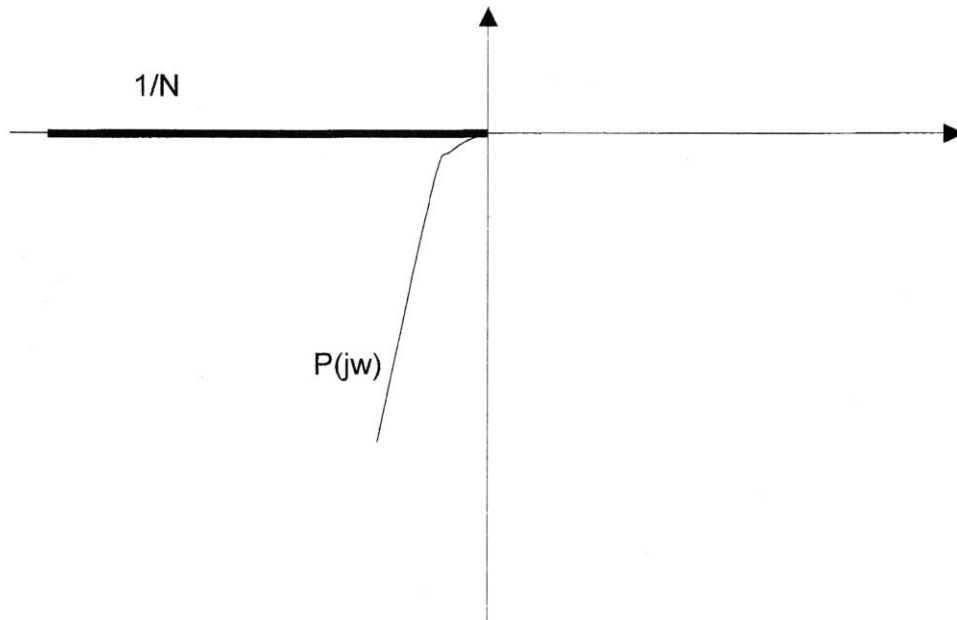
$$\Rightarrow B_1 = 25.573$$

Así. $N = \frac{B_1}{X} \angle 0^\circ = \frac{25.573}{X}$ por lo que la función descriptiva será: $N = \frac{25.573}{X}$ y

$$-\frac{1}{N} = -\frac{X}{25.573}$$

Dando valores a X, obtenemos los siguientes resultados:

X	$-\frac{1}{N}$
0	0
1	-0.039
2	-0.078
3	-0.117
4	-0.156
10	-0.391
20	-0.782
30	-1.173
50	-1.955



$$\text{Si } P(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega + 1)(j\omega + 2)}$$

$$|P(j\omega)| = \frac{1}{\omega\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{4+\omega^2}} \text{ y } \angle P(j\omega) = -90^\circ - \tan^{-1}\omega - \tan^{-1}\frac{\omega}{2}$$

ω	$P(j\omega)$	$\angle P(j\omega)$
0	∞	-90°
0.1	4.993	-98.57°
0.2	2.450	-107°
0.3	1.579	-115.22°
0.4	1.140	-123.10°
0.5	0.867	-130.59°
0.6	0.685	-137.65°
0.7	0.552	-144.28°
0.8	0.453	-150.46°
0.9	0.376	-156.21°
1	0.316	-161.56°
2	0.079	-198.43°

$$\text{Si } \omega = 1.414 = \sqrt{2}$$

$$|P(j\omega)| = 0.166 \quad \text{y} \quad \angle P(j\omega) = -179.99^\circ$$

ciclo límite con $\omega = 1.41 \text{ rad/seg.}$ Y $A = 0.166$

8. Determine la amplitud y la frecuencia de las posibles oscilaciones del sistema de la figura a. Con la no linealidad que se muestra en la figura b y $G(w) = \frac{2}{jw(jw+1)}$. El

diagrama a bloques del sistema puede manipularse como se muestra en la figura c, de tal modo que el elemento de histéresis se normalice, con una zona muerta de 1 y una pendiente de 1. La figura d puede utilizarse para construir el diagrama polar de $-1\tilde{N}$, el cual se muestra en la figura e con el diagrama polar de $2G(w)$, porque la función de transferencia de la malla que excluye la no linealidad es $4G(w)/2 = 2G(w)$.

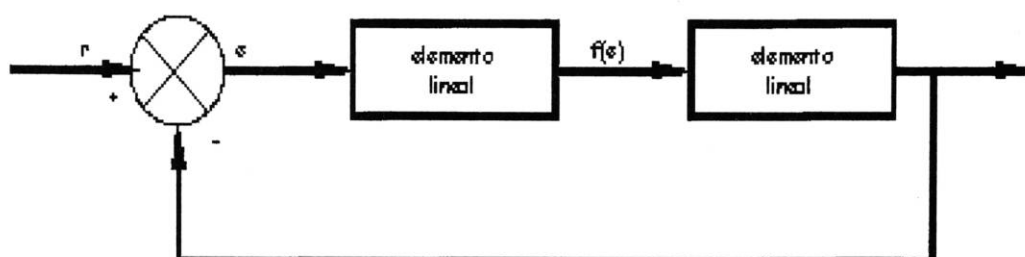


Figura a

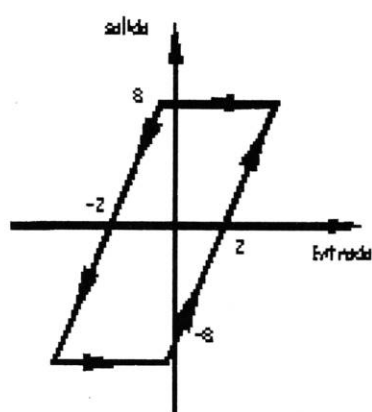


Figura b

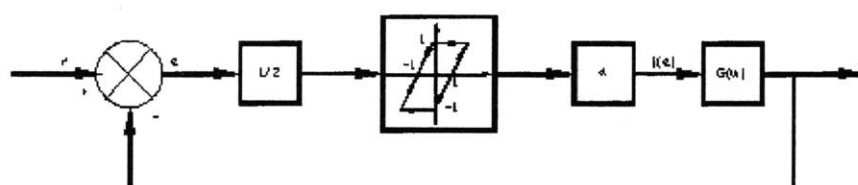


Figura c

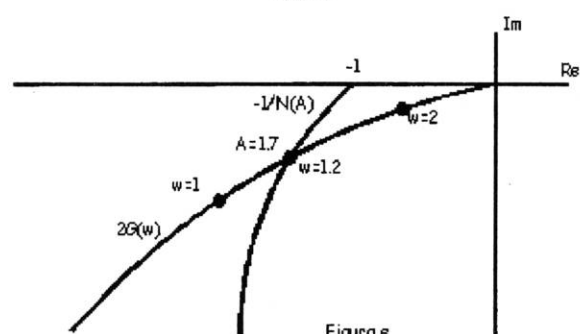


Figura e

Respuesta:

- a) = - 2.25
- b) = - 3.27 y -6.73
- c) = 0

6. Encuentre en ángulo de partida del lugar de raíces desde el polo en:

$S = -15 + 9j$ para:

$$GH(S) = \frac{K}{(S+5)(S+10)(S+15+9j)(S+15-9j)}$$

Respuesta:

$$\theta = 193^\circ$$

7. Encuentre el ángulo de llegada del lugar de raíces al cero en $S = -7 + 5j$ para:

$$GH(S) = \frac{K(S+7+5j)(S+7-5j)}{(S+3)(S+5)(S+10)}$$

Respuesta:

$$\theta = 28^\circ$$

8. Bosqueje el lugar de las raíces de los siguientes sistemas de retroalimentación unitaria:

a) $G(S) = \frac{K}{S(S^2 + 6S + 12)}$; $k > 0$

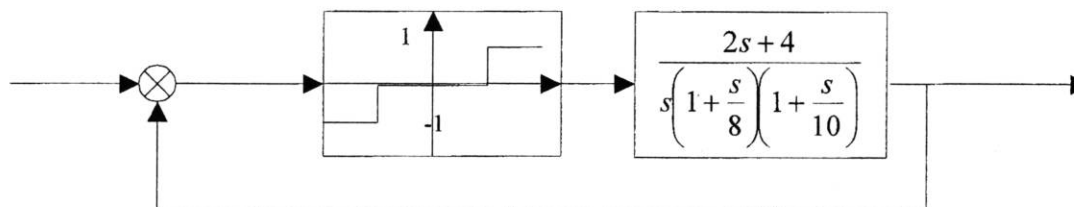
b) $G(S) = \frac{K}{S(S^2 + 2S + 2)(S^2 + 6S + 10)}$; $k > 0$

c) $G(S) = \frac{K}{S(1 + 0.02S)(1 + 0.01S)}$; $k > 0$

Además determine el valor de K para que el sistema tenga un coeficiente de amortiguamiento de 0.5

X	N	N	$\frac{1}{ N }$	$\pi - N$
1	0	-90	∞	270
1.5	0.45	-45	2.2	225
2	0.57	-30	1.75	210
2.5	0.68	-25	1.47	205
3	0.73	-22	1.37	202
3.5	0.78	-18	1.28	198
4	0.8	-16	1.25	196
4.5	0.85	-14	1.17	194
5	0.89	-12	1.12	192
1.1	0.12	-66	8.3	246
1.2	0.2	-58	5	238
1.25	0.25	-55	4	235
1.75	0.5	-35	2	215

9. Dado el siguiente sistema calcule:



- Estabilidad relativa y absoluta del sistema sin el bloque no lineal.
- Tipo de ciclo límite y valores en los que ocurre.
- Para qué valores de V_R el sistema es estable.

Solución:

Primero desarrollamos la gráfica para $P(s) = \frac{2s+4}{s\left(1+\frac{s}{8}\right)\left(1+\frac{s}{10}\right)}$

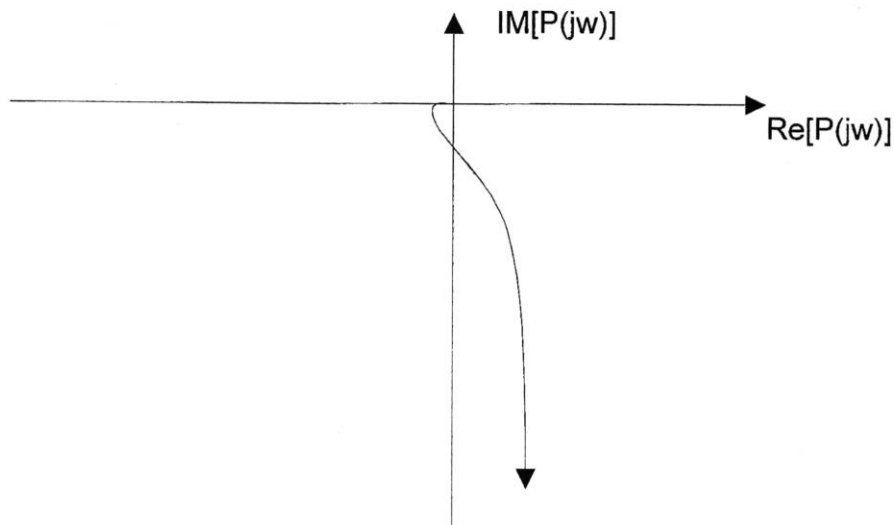
Sea $s = j\omega$, entonces podemos expresar la función como $P(s)=|P(s)|\angle P(s)$

$$|P(s)| = \left| \frac{2j\omega + 4}{j\omega \left(1 + \frac{j\omega}{8}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{10}\right)} \right| = \frac{\sqrt{4^2 + (2\omega)^2}}{\omega \sqrt{1 + (0.125\omega)^2} \sqrt{1 + (0.1\omega)^2}} = \frac{\sqrt{4\omega^2 + 16}}{\omega \sqrt{1 + 0.015\omega^2} \sqrt{1 + 0.01\omega^2}}$$

$$\angle P(s) = \angle(4+2j\omega) - \angle(j\omega) - \angle(1+0.125j\omega) - \angle(1+0.1j\omega)$$

$$= \text{tg}^{-1} \frac{2\omega}{4} - \text{tg}^{-1} \frac{\omega}{0} - \text{tg}^{-1} \frac{0.125\omega}{1} - \text{tg}^{-1} \frac{0.1\omega}{1} = \text{tg}^{-1} 0.5\omega - 90^\circ - \text{tg}^{-1} 0.125\omega - \text{tg}^{-1} 0.1\omega$$

ω	$ P(s) $	$\angle P(s)$
0	∞	-90°
0.1	39.998	-88.426°
1	4.423	-76.270°
2	2.694	-70.345°
3	2.161	-70.955°
4	1.865	-74.936°
5	1.643	-80.367°
6	1.457	-86.267°
6.63	1.351	-89.98°
10	0.911	-107.65°
12	0.730	-115.95°
15	0.535	-125.83°
20	0.339	-137.24°
25	0.231	-145.02°
40	0.097	-157.516°
50	0.063	-161.89°
∞	0	-180°



La gráfica correspondiente a la parte no lineal: **la función descriptiva de la linealidad si-no con zona muerta es:**

$$N = \frac{4M}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{X}\right)^2}$$

Para nuestro caso $M = 1$ & $\Delta = 1$, entonces

$$N = \frac{4}{\pi X} \sqrt{1 - \frac{1}{X^2}}$$

De aquí podemos ver que $N \in \mathbb{R}$, así:

$$\text{Si } \frac{1}{X} = 0.1 \Rightarrow X = 10; N = 0.12; -\frac{1}{N} = -7.895$$

$$\text{Si } X = 5 \Rightarrow -\frac{1}{N} = -4$$

$$\text{Si } X = 3.3 \Rightarrow N = 0.37 \Rightarrow -\frac{1}{N} = -2.742$$

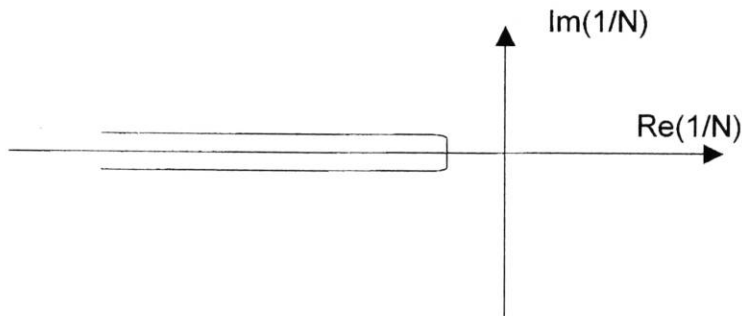
$$\text{Si } X = 2.5 \Rightarrow N = 0.55 \Rightarrow -\frac{1}{N} = -1.813$$

$$\text{Si } X = 1.666 \Rightarrow N = 0.61 \Rightarrow -\frac{1}{N} = -1.637$$

$$\text{Si } X = 1.428 \Rightarrow N = 0.63 \Rightarrow -\frac{1}{N} = -1.572$$

$$\text{Si } X = 1.25 \Rightarrow N = 0.61 \Rightarrow -\frac{1}{N} = -1.636$$

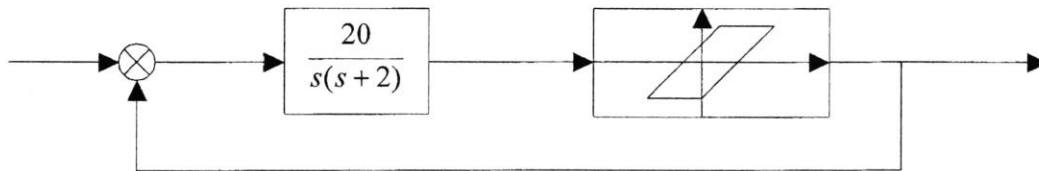
$$\text{Si } X = 1.11 \Rightarrow N = 0.49 \Rightarrow -\frac{1}{N} = -2.002$$



RESPUESTAS

- Podemos notar que al superponer las dos gráficas no existe un punto de intersección entre ellas, por lo que podemos concluir que no existe un ciclo límite.
- Para cualquier valor de V_R el sistema es estable.

10. Dado el diagrama a bloques de un servomotor el cual presenta un fenómeno de Histéresis.



Utilizando las graficas polares.

- Encuentre los valores de la amplitud de entrada para los cuales el sistema es estable.
- Si ocurren ciclos límite diga de qué tipo son.
- Si ocurre un ciclo límite inestable encuentre la ω y X a la que ocurren

$$\text{Sea } P(s) = \frac{20}{s(s+2)} \text{ si } s = j\omega \Rightarrow P(j\omega) = \frac{20}{j\omega(j\omega+2)} = |P(j\omega)| \angle P(j\omega)$$

$$|P(j\omega)| = \frac{20}{\omega\sqrt{4+\omega^2}} \text{ y } \angle P(j\omega) = \angle 20 - \angle j\omega(j\omega+2) = 0^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega}{0} - \tan^{-1} \frac{\omega}{2} = -90^\circ - \tan^{-1} 0.5\omega$$

ω	$ P(j\omega) $	$\angle P(j\omega)$
0	∞	-90°
1	8.944	-119.56°
2	3.535	-135°
3	1.849	-146.3°
4	1.118	-153.43°
5	0.742	-158.19°
6	0.527	-161.56°
7	0.392	-164.05°
8	0.303	-165.96°
9	0.241	-167.47°
10	0.196	-168.69°
11	0.162	-169.69°
12	0.011	-174.28°
∞	0	-180°

Para encontrar la gráfica del bloque no lineal, usamos la gráfica 11-34 de la pag. 608 de Ogata, que presenta la función descriptiva de una alinealidad de histéresis. Así $N=|N|\angle N$ & $N \in \mathbb{C}$

$$\text{Sea } h=1 \Rightarrow \frac{h}{X} = \frac{1}{X}; \text{ además } -\frac{1}{N} = -\frac{1}{|N|} \angle \frac{1}{N} = -\frac{1}{|N|} [-\angle N]$$

$$\frac{1}{X} = 0.1 \Rightarrow X = 10 \Rightarrow |N| = 0.96 \quad -\frac{1}{|N|} = -1.041$$

$$\angle N = -7^\circ \Rightarrow -\angle N = -(-7) = 7^\circ$$

$$\text{Así } -\frac{1}{N} = -1.041(\cos 7^\circ + j \sen 7^\circ) = -1.033 - j0.126$$

$$\frac{1}{X} = 0.2 \Rightarrow X = 5 \Rightarrow |N| = 0.88 \Rightarrow -\angle N = 13^\circ \therefore -\frac{1}{N} = -1.106 - j0.126$$

$$X = 3.333 \quad |N| = 0.79 \Rightarrow -\angle N = 20^\circ \therefore -\frac{1}{N} = -1.188 - j0.432$$

$$X = 2.5 \quad |N| = 0.69 \Rightarrow -\angle N = 27^\circ \therefore -\frac{1}{N} = -1.291 - j0.657$$

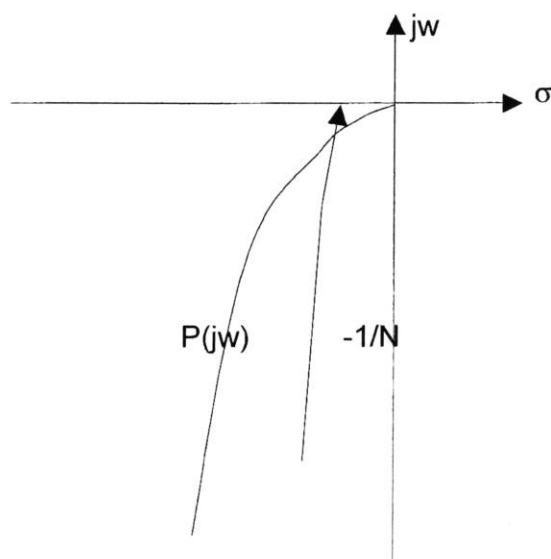
$$X = 2 \quad |N| = 0.58 \Rightarrow -\angle N = 33^\circ \therefore -\frac{1}{N} = -1.445 - j0.938$$

$$X = 1.666 \quad |N| = 0.47 \Rightarrow -\angle N = 40^\circ \therefore -\frac{1}{N} = -1.629 - j1.367$$

$$X = 1.428 \quad |N| = 0.37 \Rightarrow -\angle N = 47^\circ \therefore -\frac{1}{N} = -1.842 - j1.976$$

$$X = 1.25 \quad |N| = 0.25 \Rightarrow -\angle N = 56^\circ \therefore -\frac{1}{N} = -2.236 - j3.316$$

$$X = 1.11 \quad |N| = 0.12 \Rightarrow -\angle N = 67^\circ \therefore -\frac{1}{N} = -3.254 - j7.667$$



- a) De la gráfica podemos ver que para $X = 10$ hasta $X = 2.5$ el sistema es estable; ya que $P(j\omega)$ no rodea a $-\frac{1}{N}$
- b) Ocurre un ciclo límite de tipo estable
- c) Sabemos que el polo dominante debe estar situado en: $\omega = 3.1$ y $X = 2$

V. PROBLEMAS PROPUESTOS CON SOLUCIÓN

V.1 MÉTODOS DE FRECUENCIA A LA FRECUENCIA

1. Dibuje los diagramas de Bode del sistema:

$$G(j\omega) = \frac{5(1 + j0.1\omega)}{j\omega(1 + 0.5j\omega) \left(1 + \frac{0.6j\omega}{50} + \left(\frac{\omega}{50} \right)^2 \right)}$$

2. Determine el Ancho de Banda del sistema de retroalimentación cuyo lazo abierto es:

$$GH(s) = \frac{60}{s(s+2)(s+6)} \text{ para el sistema de lazo cerrado.}$$

Respuesta: BW=3 rad/seg.

3. Determine el margen de fase del sistema de retroalimentación si:

$$GH(s) = \frac{2(s+1)}{s^2}$$

Respuesta: 65.5°

4. Calcule los Márgenes de ganancia y de fase de: $GH(S) = \frac{432}{S(S^2 + 13S + 115)}$

Respuesta: Kg=3.4; γ=65°.

V.2 LUGAR DE LAS RAÍCES

5. Para cada Función de Transferencia encontrar los puntos de separación sobre el lugar de las raíces:

a) $GH(S) = \frac{K}{S(S+6)(S+8)}$

b) $GH(S) = \frac{K(S+5)}{(S+2)(S+4)}$

c) $GH(S) = \frac{K(S+1)}{S^2(S+9)}$

Respuesta:

- a) = - 2.25
- b) = - 3.27 y -6.73
- c) = 0

6. Encuentre en ángulo de partida del lugar de raíces desde el polo en:

$S = -15 + 9j$ para:

$$GH(S) = \frac{K}{(S+5)(S+10)(S+15+9j)(S+15-9j)}$$

Respuesta:

$$\theta = 193^\circ$$

7. Encuentre el ángulo de llegada del lugar de raíces al cero en $S = -7 + 5j$ para:

$$GH(S) = \frac{K(S+7+5j)(S+7-5j)}{(S+3)(S+5)(S+10)}$$

Respuesta:

$$\theta = 28^\circ$$

8. Bosqueje el lugar de las raíces de los siguientes sistemas de retroalimentación unitaria:

a) $G(S) = \frac{K}{S(S^2 + 6S + 12)}$; $k > 0$

b) $G(S) = \frac{K}{S(S^2 + 2S + 2)(S^2 + 6S + 10)}$; $k > 0$

c) $G(S) = \frac{K}{S(1 + 0.02S)(1 + 0.01S)}$; $k > 0$

Además determine el valor de K para que el sistema tenga un coeficiente de amortiguamiento de 0.5

Respuesta:

a) 3 ramas; sobre el eje real: de 0 a $-\infty$; $\gamma = \pm 60^\circ, 180^\circ$; ángulos de partida: $\pm 60^\circ, 180^\circ$; cruce con el eje imaginario: $\pm 3.464j$ con $K = 73.2$

b) 5 ramas, ramas sobre el eje real: de 0 a $-\infty$, $\gamma = \pm 36^\circ, \pm 108^\circ, 180^\circ$; $\sigma = -8/5$, ángulos de partida : $-90^\circ, -26^\circ$; cruce con el eje imaginario: $\pm 0.9j$ con $K = 20.6$

c) 3 ramas, ramas sobre el eje real: de 0 a - 50 y de - 100 a $-\infty$;

$\gamma = \pm 60^\circ$ y 180°

$\sigma = -50$, punto de separación = -21.1 con

$K = 9.5$, cruce con el eje imaginario: $\pm 70.7j$ con

$K = 150$, valor de k para $\xi = 0.5$: $K = 25.92$

9. Bosqueje el lugar de las raíces de un sistema de retroalimentación cuyo lazo abierto es:

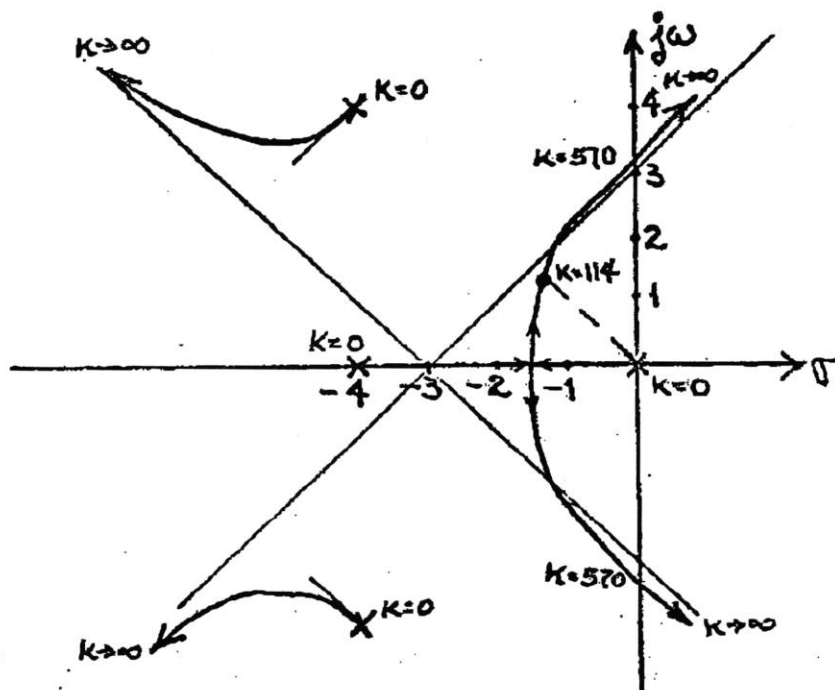
$$GH(s) = \frac{k}{s(s+4)(s+4+4j)(s+4-4j)} \quad K > 0$$

De el valor de k para que el sistema tenga un $\xi = 0.707$

Respuesta:

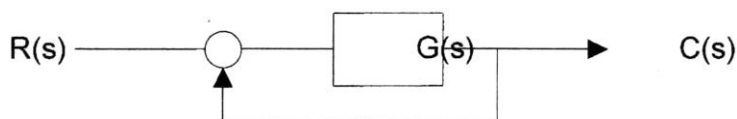
4 ramas, (segmento de L de R sobre el eje real): de 0 a - 4

$\gamma = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$, $\sigma = -3$, punto de separación = -1.5, cruce con el eje imaginario: $\pm 3.25j$ con $k = 570$, ángulo de partida : 225° , valor de k para $\xi = 0.707$: $k = 114$



V.3 COMPENSACIÓN DE SISTEMAS

10. Sea un sistema de retroalimentación unitaria, cuya función de transferencia directa está dada por $G(S) = 1/S^2$. Se desea insertar en serie un compensador, de modo que la curva de respuesta de frecuencia de lazo abierto sea tangente a la circunferencia $M = 3$ dB en $\omega = 3$ rad/seg. El sistema está sujeto a ruidos de alta frecuencia y se desea un corte abrupto. Se pide diseñar un compensador serie adecuado.



Solución:
$$G_{sc} = \frac{(S + 2.17)(43)}{S^2(S + 5.82)}$$

11. Con $G_x(S) = \frac{K}{S(S+10)(S^2+30S+625)}$

Encuentre K_1 , M_o , T_p , T_s , N ; para los siguientes casos:

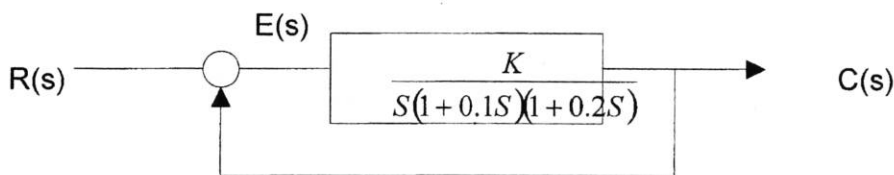
- Sistema sin compensar. Use $\xi=0.5$. Utilizando el método de la gráfica del lugar de las raíces.
- Sistema compensado en atraso $\alpha=10$, $T=5$
- Sistema compensado en adelanto. $\alpha=0.1$ y $T=0.2$

Solución:

- $K_1 = 5.46$, $T_p = 0.65$ seg., $T_s = 1.14$, $M_o = 0.22$, $N = 1.16$
- $K_1 = 85.2$, $T_p = 0.33$ seg., $T_s = 0.70$, $M_o = 0.13$, $N = 1$
- $K_1 = 2.24$, $T_p = 0.17$ seg., $T_s = 0.36$, $M_o = 0.12$, $N = 1.11$.

12. El diagrama a bloques de la siguiente figura muestra los componentes básicos de un servomecanismo antes de la compensación. El sistema debe cumplir las siguientes especificaciones:

- Constante de velocidad $K_v = 20 \text{ seg}^{-1}$
- Margen de fase mayor o igual a 45°



Diseñar una red de compensación en serie que satisfaga esos requerimientos.

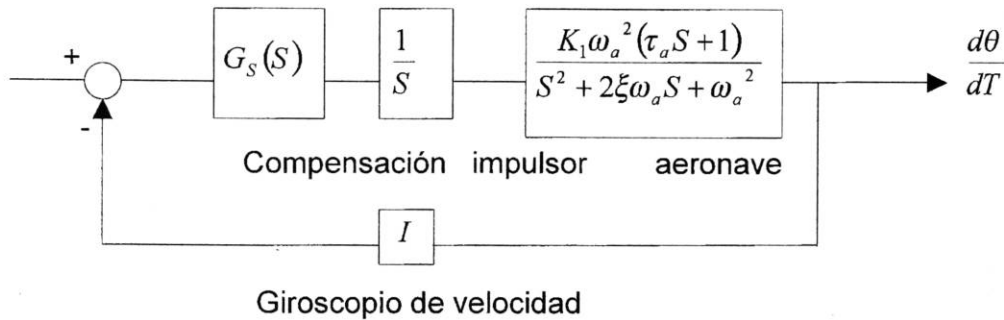
Solución: $G_c(S)G(S) = \frac{0.379S+1}{0.0218S+1} \cdot \frac{20}{S(1+0.1S)(1+0.2S)}$

13. Un sistema de retroalimentación unitaria tiene la siguiente función de transferencia $G_x(s) = Kx(S+6) / S(s+10/3)$, las raíces del lazo cerrado deben satisfacer $\xi=0.5$ y $T_s = 2$ seg. Se sugiere un compensador $G_c(s)$ el cual deba mantener el mismo grado de la ecuación característica para el sistema básico $G_e(S) = \lambda(S+a)(S+b)$.

- Determine los valores de a y b
- Determine el valor de α
- ¿Es un compensador de atraso o adelanto?

Solución: a) $a = 1.9$, $b = 6$; b) $\alpha = 0.6$; c) Es un compensador en Adelanto

14. En la siguiente figura se muestra una versión simplificada del control de posición proporcional para la aeronave tipo F-94. Cuando el vehículo esta volando a 4 veces la velocidad del sonido (MACH 4) a una altitud de 100,000pies, los parámetros son: $1/\tau_a = 0.04$, $K_1 = 0.02$, $\xi\omega_a = 0.04$, $\omega_a = 2$. Diseñe una red de compensación de tal forma que los polos complejos tengan aproximadamente $\xi = 0.707$ y $\omega_n = 3$.



Solución: $G_{C1}(S)G_{C2}(S)G(S) = \frac{S+1.5}{S+6.5} \frac{S+2.6}{S+3.6} \frac{2(S+0.04)}{S(S+0.04-2j)(S+0.04+2j)}$

15. Un sistema de control, tiene la siguiente función de transferencia directa. El sistema de malla cerrada debe estabilizarse. Adecuando un compensador $G_c(s)$ y un amplificador A en cascada con $G_x(s)$. Se desea una $\xi = 0.5$ y un valor para $\omega_n = 1.6$ rad/seg. Utilizando el método del lugar de las raíces, Determinar:

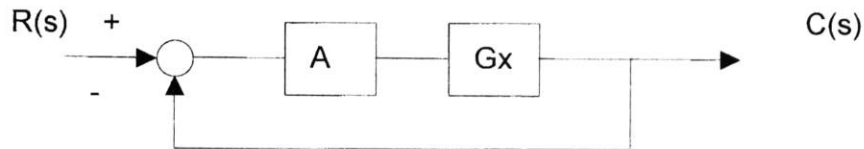
- ¿Qué tipo de compensador se necesita?
- Diseñar el compensador utilizado
- Determinar el valor del coeficiente del error (K_2)

$$G_x(S) = \frac{K_x}{S^2(1+0.1S)}$$

- Solución: a) Se requiere un compensador de adelanto
 b) $G_c(S) = A (S+1/0.72) / (S+1/0.294)$
 c) $K_2 = 1.043$

16. Sea un sistema de control con $G_x(S) = K_2 / S^2(1+0.1S)$ con $K_2 = 1$. El sistema de lazo cerrado se ha hecho estable añadiendo un compensador G_c y un amplificador A en cascada con $G_x(S)$. Se desea un $M_r = 1.5 = M_m$ con $\omega_m = 1.4$ rad/seg = ω_r .

- ¿Qué clase de comparador es necesario?
- Seleccione α y T para el compensador
- Seleccionar el valor de ganancia del amplificador A
- Graficar la curva compensada



Solución: a) El compensador necesario es de adelanto de fase, debido a que el transitorio es el de interés.

b) $\alpha = 0.2613$ y $T = 1.234$

c) $A = 4.78$

d) $G_{sc}(S) = 4.78(S+0.81) / S^2(S+3.1)(S+10)$

17. Un sistema con retro unitaria, $H(S) = 1$; $R(S)$ señal escalonada unitaria, determinar:

$$G(S) = \frac{k}{(0.1S + 1)(0.02S + 1)(0.006 + 1)}$$

- Por criterio de Routh hallar K_{\max} para estabilidad en el lazo cerrado.
- Evaluar el error en estado estable $e_{ss}(t)$ para la ganancia obtenida en el inciso a)

Nota: Se desea que $e_{edo\ est} = 0.03$ máximo.

Solución: a) $K_{\max} = 27.5$; $e_{ss}(t) 0.06789$ como es mayor al requerido, entonces haga las aproximaciones necesarias para que el sistema sea estable.

18. Un sistema de control de retroalimentación unitaria tiene la siguiente función de transferencia de circuito abierto $G(S) = K / S (0.1S+1)(1+0005S)$. Se dan las siguientes especificaciones de funcionamiento del sistema:

- a) La constante de velocidad $K_v \geq 1000 \text{Seg}^{-1}$
 - b) El margen de la fase debe ser por lo menos de 45°
- Diseñar una red de compensación en serie de modo que este sistema compensado satisfaga esas condiciones. Comparar las siguientes cantidades del sistema compensando y descompensando: Margen de ganancia, margen de fase y ancho de banda.

Solución: $G_c(S)G(S) = \frac{S/60+1}{S/453+1} \frac{1000}{S(S/10+1)(S/2000+1)}$

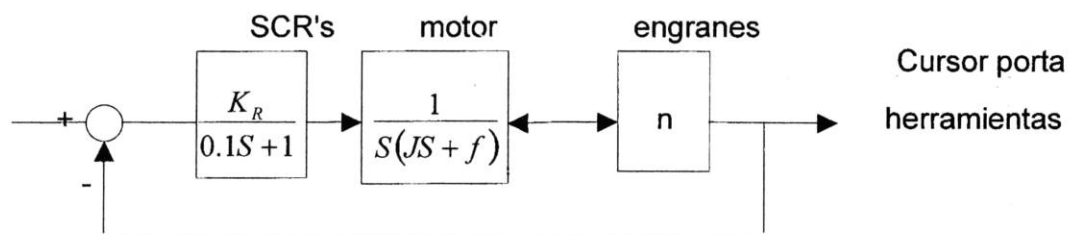
Red sin compensar $\gamma = 0^\circ$ $K_g = 0$ sistema inestable
 Red compensada $\gamma = 45^\circ$ $K_g = 8.78 \text{ dB}$ $BW = 224 \text{ rad/seg}$

El sistema se vuelve estable y duplicó su BW lo que implica que aumenta la velocidad de respuesta.

19. El torno revolvedor con maquinaria de paso controlado plantea un problema interesante en la obtención de exactitud suficiente. En la figura se muestra un diagrama a bloques del sistema de control de un torno revolvedor. La relación de engranes es $n = 0.1$, $J = 10^{-3}$ y $f = 10^{-2}$. Es necesario obtener una exactitud de 5×10^{-4} pulgadas; por tanto, para una entrada de rampa se especifica una exactitud de 1% en la posición de estado estacionario.

Diseñe un compensador en cascada para introducir antes de los rectificadores controlados de silicio con el objeto de proporcionar una respuesta para un orden de escalón con un sobrenivel menor al 2%. (una relación de amortiguamiento adecuada para este sistema es de 0.8). La ganancia de los rectificadores de silicio es de $K_R = 5$.

Diseñe un compensador adecuado usando el método de frecuencia.



Solución: $G_c(S)G(S) = \frac{(S + 6.25)5000}{(S + 30.01)S(S + 10)}$

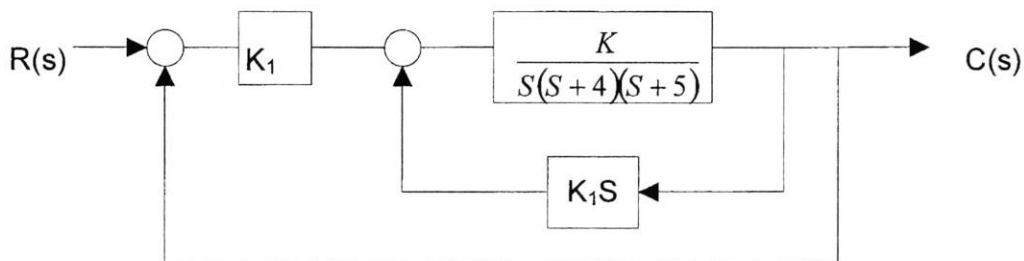
20. Un sistema tiene la función de transferencia $M(S)$ dada por

$$M(S) = \frac{1}{(0.01S + 1)(1 - 0.05S + 0.01S^2)}$$

Determinar el factor de resonancia M_p y la frecuencia de resonancia ω_p del sistema. Además, determine el coeficiente de amortiguamiento ξ y la frecuencia propia no amortiguada ω_n del sistema de 2° orden que produce el mismo M_p y la misma ω_p que el sistema original.

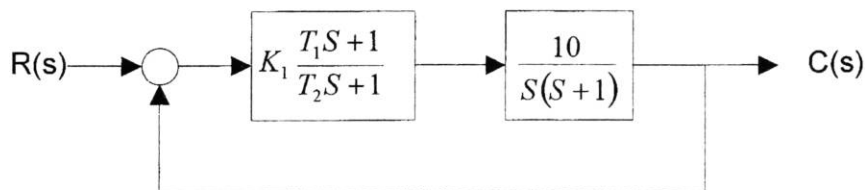
Solución: $\omega_n = 10$, $\xi = 0.25$, $M_p = 2.065$, $\omega_n = 100$ De 2°. Orden

21. Para el sistema que se muestra en el diagrama a bloques de la figura, determine K_1 y K_2 de tal manera que el sistema tenga polos de lazo cerrado en $S = -2 \pm 2j$.



Solución: $K_1 = 39.83$, $K_2 = 7.81$

22. Determine los valores K_1 , T_1 y T_2 del sistema que aparece en la figura, de manera que los polos dominantes de lazo cerrado tengan un $\xi=0.5$ y $\omega_n=3$ rad/seg.



Solución: $K_1 = 0.512$; $T_1 = 0.516$; $T_2 = 0.215$

23. Un sistema de retroalimentación tiene la siguiente función de transferencia:

$$GH(S) = \frac{K}{S(S+2)}$$

Compense el sistema para que tenga las siguientes características:

$$\begin{aligned} K_v &< 5\% \\ \gamma &> 45^\circ \end{aligned}$$

$$\text{Solución: } K = 20 \quad Y \quad G_c = \frac{1}{3} \frac{(1+S/4.8)}{(1+S/14.4)}$$

24. Un sistema de retroalimentación tiene la siguiente función de transferencia:

$$GH(S) = \frac{K_1}{S^2}$$

Compense el sistema para que tenga las siguientes características:

$$\begin{aligned} T_s &\subseteq 4 \text{ Seg} \\ M_p &\subseteq 20\% \end{aligned}$$

$$\text{Solución: } K_1 = 0.81 \quad Y \quad G_c = \frac{S+1}{S+3.6}$$

25. Un sistema de lazo cerrado tiene la siguiente función de transferencia.

$$GH(S) = \frac{K}{S(1+0.1S)(1+0.2S)}$$

Compense el sistema para que tenga las siguientes características:

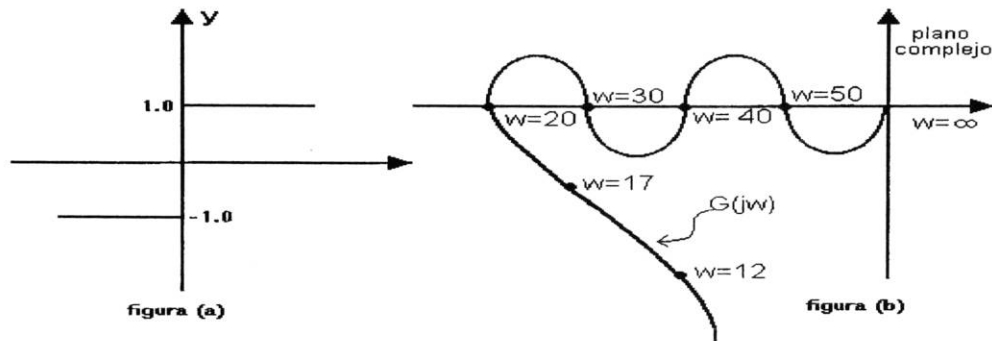
Error en estado permanente = 3.3%

Margen de Fase: $\gamma \geq 40^\circ$

$$\text{Solución: } K = 30 \quad G_c(S) = \frac{(1+3.33S)}{(1+33.3S)}$$

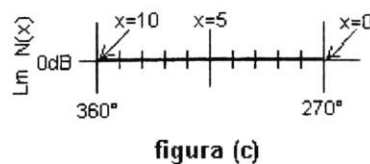
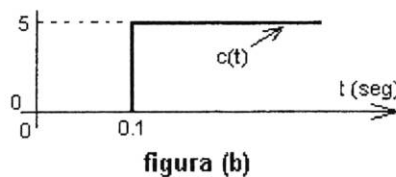
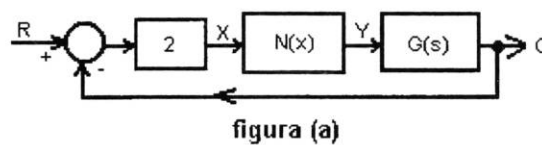
V.4 SISTEMAS NO LINEALES

26. Cuando un sistema de control con la planta $G(j\omega)$ como la que se muestra en la figura (b), es controlada por un relevador ideal como el que se muestra en la figura (a). ¿Cuántas oscilaciones periódicas se obtienen mediante análisis de la función descriptiva? Indicar cuáles de estas soluciones son estables.



Respuesta: $\omega = 30$ y $\omega = 50$ son inestables, y $\omega = 20$ y $\omega = 40$ son estables

27. Para el sistema mostrado en la figura (a) determine la frecuencia y amplitud de oscilación de $x(t)$ que son pronosticados por el método de la función descriptiva. La medida de lazo abierto indica que la respuesta de $G(s)$ cuando $y(t)$ es un impulso unitario en $t=0$ es como se muestra en la figura (b). La gráfica de la magnitud de la función $N(x)$ es mostrada en la figura (c).



Respuesta: Oscilación estable
Con frecuencia de 10 rad/seg
Y amplitud de 6.37.

BIBLIOGRAFÍA

- 1) INGENIERIA DE CONTROL MODERNA
KATSUHIKO OGATA
PRENTICE HALL, 3ª. ED. 1998
- 2) SISTEMAS MODERNOS DE CONTROL
RICHARD C. DORF
ADDISON WESLEY, 2ª. ED. 1989
- 3) SISTEMAS DE CONTROL AUTOMATICO
BENJAMÍN C. KUO
PRENTICE HALL, 7ª. ED. 1996
- 4) SISTEMAS LINEALES DE CONTROL, ANÁLISIS Y DISEÑO
D'AZZO Y HOUPIS
PARANINFO, S.A. 1997
- 5) AUTOMATIC CONTROL ENGINEERING
FRANCIS H. RAVEN
M_C GRAW HILL, 4ª. ED. 1987
- 6) RETROALIMENTACIÓN Y SISTEMAS DE CONTROL
DISTEFANO III
M_C GRAW HILL, 4ª. ED. 1992

***MANUAL DE SOLUCIONES A PROBLEMAS BÁSICOS
DE LA UEA SISTEMAS DE CONTROL II***

**SE TERMINÓ DE IMPRIMIR EN EL MES DE
ABRIL DE 2009 EN LOS TALLERES DE LA SECCIÓN
DE IMPRESIÓN Y REPRODUCCIÓN DE LA
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD AZCAPOTZALCO**

**SE IMPRIMIERON 100 EJEMPLARES
MÁS SOBRANTES PARA REPOSICIÓN**

**LA EDICIÓN ESTUVO A CARGO DE LA
SECCIÓN DE PRODUCCIÓN Y DISTRIBUCIÓN EDITORIALES
DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD AZCAPOTZALCO**

- Ordenar las fechas de vencimiento de manera vertical.
- Cancelar con el sello de "DEVUELTO" la fecha de vencimiento a la entrega del libro

UAM
QA402.3
A4.85
v.2

2892913
Ivarez Bailesteros, Enriq
Manual de soluciones a pr

MANUAL DE SOLUCIONES A PROBLEMAS BASICOS UE
ALVAREZ BALLESTEROS * SECCION DE IMPRESION

53978

R. 40



\$ 22.00

ISBN: 970-31-0629-3



978-97031-06295

40-ANTOLOGIAS CBI * 01-CBI

UNIVERSIDAD
AUTONOMA
METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo



Azacapozalco

Division de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Electrónica
Coordinación de Extensión Universitaria
Sección de Producción y Distribución Editoriales